

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ’ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ
ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ
ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМКаленюк П. І.^{a, b}, Ільків В. С.^a, Нитребич З. М.^a, Когут І. В.^a^a Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна^b Жешувський університет
вул. Рейтана, 16-А, 35-959, Жешув, Польща

(Отримано 30 вересня 2013 р.)

Знайдено клас однозначної розв’язності задачі з неоднорідними інтегральними часовими умовами для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом, яке узагальнює бікалоричне рівняння. У цьому класі функцій квазіполіномного вигляду розв’язок задачі подано за допомогою диференціально-символьного методу як дію диференціальних виразів, символами яких є праві частини інтегральних умов, на деякі функції параметрів.

Ключові слова: рівняння із частинними похідними нескінченного порядку, інтегральні умови, бікалоричне рівняння, диференціально-символьний метод.

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95

Вступ

Задачі з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними в останні роки знаходять широке застосування у важливих практичних дослідженнях. Інтегральні умови використовують, зокрема, у моделях поширення тепла та вологопереносу, у демографічних моделях та задачах математичної біології, в обернених задачах теорії теплопровідності, задачах оптимального контролю в техніці тощо [6, 10–13, 16].

Задачі з інтегральними умовами є умовно коректними. Встановленню умов коректної розв’язності таких задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними присвячено чимало праць вчених (див., наприклад, [1, 2, 5, 7–9, 15]) та бібліографію в них.

Ця стаття є продовженням досліджень [4, 14] і присвячена питанню однозначної розв’язності задачі з неоднорідними інтегральними часовими умовами для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та в загальному випадку нескінченного порядку за просторовою змінною у смузі. Розв’язки задачі за допомогою диференціально-символьного методу [3] у класі квазіполіномів будуються в явному вигляді як результат дії деяких диференціальних виразів на мероморфні функції параметра з подальшим накладанням нульового значення цього параметра.

I. Формулювання задачі

У смузі $S_h = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: t \in (0, h), x \in \mathbb{R}\}$ шириною $h > 0$ вивчаємо задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 U(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$\int_0^h U(t, x) dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^h t U(t, x) dt = \varphi_2(x), \quad (2)$$

де $a(\partial/\partial x)$ – диференціальний вираз, символ $a(\nu)$ якого є довільна ціла функція, що не є сталою.

За зразком рівняння (1) заміною $\partial/\partial t$ на d/dt і $\partial/\partial x$ на ν запишемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\nu) \right]^2 T = 0. \quad (3)$$

Загальний розв’язок рівняння (3) має вигляд

$$T(t, \nu) = C_1(\nu) e^{a(\nu)t} + C_2(\nu) t e^{a(\nu)t}, \quad (4)$$

де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ – довільні функції параметра ν .

Знайдемо розв’язки $\widehat{T}_1(t, \nu)$, $\widehat{T}_2(t, \nu)$ рівняння (3), які задовольняють умови

$$\int_0^h \widehat{T}_1(t, \nu) dt = 1, \quad \int_0^h t \widehat{T}_1(t, \nu) dt = 0, \quad (5)$$

$$\int_0^h \widehat{T}_2(t, \nu) dt = 0, \quad \int_0^h t \widehat{T}_2(t, \nu) dt = 1. \quad (6)$$

Шукаємо $\widehat{T}_1(t, \nu)$ у вигляді (4), де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ – невідомі функції параметра ν . Задовольняючи умови (5), одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1(\nu)I_0(\nu) + C_2(\nu)I_1(\nu) = 1, \\ C_1(\nu)I_1(\nu) + C_2(\nu)I_2(\nu) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} I_0(\nu) &= \int_0^h e^{a(\nu)t} dt = \frac{e^{a(\nu)h} - 1}{a(\nu)}, \\ I_1(\nu) &= \int_0^h t e^{a(\nu)t} dt = \frac{ha(\nu)I_0(\nu) + h - I_0(\nu)}{a(\nu)}, \\ I_2(\nu) &= \int_0^h t^2 e^{a(\nu)t} dt = \\ &= \frac{a^2(\nu)h^2 I_0(\nu) + a(\nu)h^2 - 2ha(\nu)I_0(\nu) - 2h + 2I_0(\nu)}{a(\nu)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, якщо $a(\nu_0) = 0$, то $I_0(\nu_0) = h$, $I_1(\nu_0) = h^2/2$, $I_2(\nu_0) = h^3/3$.

Головний визначник системи (7) має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta(\nu) &= \begin{vmatrix} I_0(\nu) & I_1(\nu) \\ I_1(\nu) & I_2(\nu) \end{vmatrix} = I_0(\nu)I_2(\nu) - I_1^2(\nu) = \\ &= \frac{I_0^2(\nu) - a(\nu)h^2 I_0(\nu) - h^2}{a^2(\nu)}. \end{aligned}$$

Враховуючи позначення для $I_0(\nu)$, знаходимо

$$\Delta(\nu) = \frac{(e^{a(\nu)h} - 1)^2 - h^2 a^2(\nu) e^{a(\nu)h}}{a^4(\nu)}, \quad (8)$$

причому, якщо $a(\nu_0) = 0$, то $\Delta(\nu_0) = h^4/12$.

Позначимо

$$M = \{\nu \in \mathbb{C} : \Delta(\nu) \neq 0\}. \quad (9)$$

Обчислюємо визначники

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(\nu) &= \begin{vmatrix} 1 & I_1(\nu) \\ 0 & I_2(\nu) \end{vmatrix} = I_2(\nu), \\ \Delta_{12}(\nu) &= \begin{vmatrix} I_0(\nu) & 1 \\ I_1(\nu) & 0 \end{vmatrix} = -I_1(\nu). \end{aligned}$$

Для $\nu \in M$ знаходимо

$$\begin{aligned} \widehat{T}_1(t, \nu) &= \frac{\Delta_{11}(\nu) + t\Delta_{12}(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{a(\nu)t} = \frac{I_2(\nu) - tI_1(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{a(\nu)t} = \\ &= \frac{(a^2(\nu)h^2 - 2a(\nu)h + 2) e^{a(\nu)h} - 2 - a(\nu)t e^{a(\nu)h} (a(\nu)h - 1) - a(\nu)}{a^3(\nu)\Delta(\nu)} e^{a(\nu)t}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо $\widehat{T}_2(t, \nu)$ у вигляді (4), задовольняючи умови (6):

$$\begin{aligned} \widehat{T}_2(t, \nu) &= \frac{\Delta_{21}(\nu) + t\Delta_{22}(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{a(\nu)t} = \\ &= \frac{-I_1(\nu) + tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{a(\nu)t} = \\ &= \frac{-(a(\nu)h - 1) e^{a(\nu)h} - 1 + a(\nu)t (e^{a(\nu)h} - 1)}{a^2(\nu)\Delta(\nu)} e^{a(\nu)t}. \end{aligned}$$

Знову зауважимо, якщо $a(\nu_0) = 0$, то

$$\widehat{T}_1(t, \nu_0) = \frac{2(2h - 3t)}{h^2}, \quad \widehat{T}_2(t, \nu_0) = \frac{6(2t - h)}{h^3}.$$

II. Основні результати

Лема 1. Нехай $T(t, \nu)$ – розв’язок рівняння (3), який для $\nu \in M$ і $t \in [0, h]$ задовольняє умови

$$\int_0^h T(t, \nu) dt = 0, \quad \int_0^h t T(t, \nu) dt = 0, \quad (10)$$

тоді $T(t, \nu) \equiv 0$ на $[0, h] \times M$.

□ *Доведення.* Якщо $T(t, \nu)$ – розв’язок рівняння (3), то його можна зобразити у вигляді (4), де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ – довільні функції параметра ν . Задовольняючи умови (10), одержуємо для цих функцій систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1(\nu)I_0(\nu) + C_2(\nu)I_1(\nu) = 0, \\ C_1(\nu)I_1(\nu) + C_2(\nu)I_2(\nu) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Оскільки $\nu \in M$, де M – множина (9), то отримуємо умову $\Delta(\nu) \neq 0$. Звідси випливає, що система (11) має лише тривіальний розв’язок $C_1(\nu) = C_2(\nu) = 0$. Тому $T(t, \nu) \equiv 0$ на $[0, h] \times M$. ■

Лема 2. Якщо $P = \{\nu \in \mathbb{C} : a(\nu) \in \mathbb{R}\}$, то $P \subseteq M$.

□ *Доведення.* Позначимо $a(\nu)h = x$. Оскільки $a(\nu) \in \mathbb{R}$, то $x \in \mathbb{R}$ і навпаки. Маємо дійснозначну функцію на P :

$$\Delta(\nu) = \frac{(e^x - 1)^2 - x^2 e^x}{x^4} h^4.$$

Функція $f(x) = \frac{(e^x - 1)^2 - x^2 e^x}{x^4}$ в точці $x = 0$ має

усувну особливість. Справді,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 - x^2 e^x}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 - x^2 e^x}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^4} - \frac{x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)}{x^4} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(2x)^4}{4!} - 2\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{2!} + o(x^4)}{x^4} = \\ &= \frac{2^4}{4!} - \frac{2}{4!} - \frac{1}{2!} = \frac{16}{24} - \frac{2}{24} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Рівняння $(e^x - 1)^2 - x^2 e^x = 0$ еквівалентне двом рівнянням $e^x - 1 - x e^{x/2} = 0$ та $e^x - 1 + x e^{x/2} = 0$, або $\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ та $\operatorname{sh} \frac{x}{2} = -\frac{x}{2}$. Ці рівняння дійсних ненульових коренів не мають (див. рис. 1).

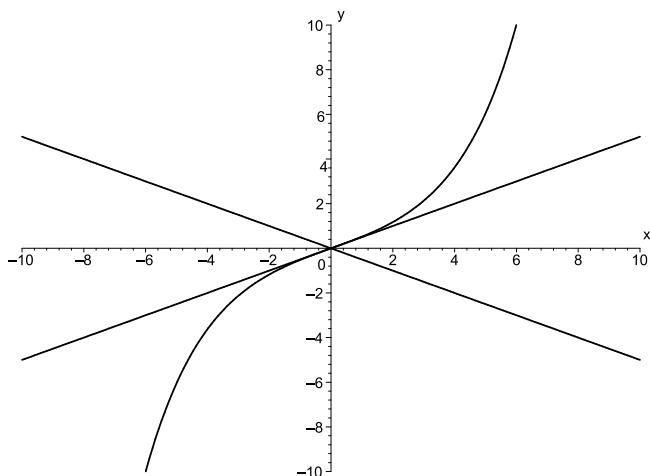


Рис. 1. Графіки функцій $y = \operatorname{sh} \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2}$

Отже, $f(x) \neq 0$ на \mathbb{R} , тому $\Delta(\nu) = f(a(\nu)h)h^4 \neq 0$ на P , тобто $P \subseteq M$. ■

Лема 3. Якщо $\tilde{P} = \{\nu \in \mathbb{C} : ia(\nu) \in \mathbb{R}\}$, то $\tilde{P} \subseteq M$.

□ *Доведення.* Позначивши $a(\nu)h = ix$, одержимо, що $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\Delta(\nu) = \frac{(e^{ix} - 1)^2 + x^2 e^{ix}}{x^4} h^4.$$

Функція $f(x) = \frac{(e^{ix} - 1)^2 + x^2 e^{ix}}{x^4}$ в точці $x = 0$ також має усувну особливість, а рівняння $(e^{ix} - 1)^2 + x^2 e^{ix} = 0$ еквівалентне двом рівнянням $\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ та

$\sin \frac{x}{2} = -\frac{x}{2}$. Останні рівняння дійсних ненульових коренів не мають (див. рис. 2).

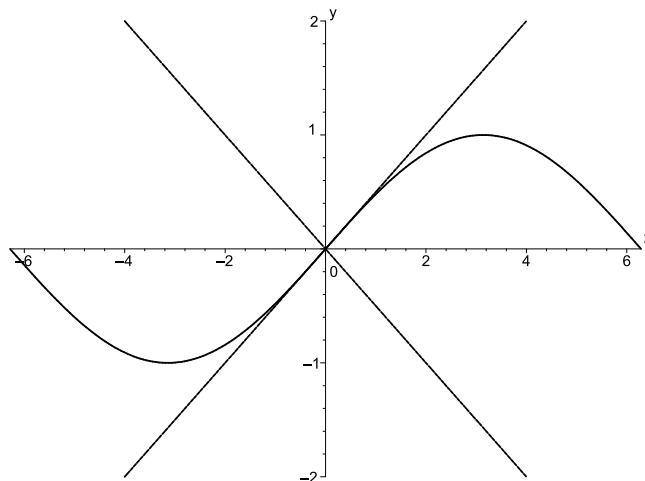


Рис. 2. Графіки функцій $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2}$

Тому аналогічно $\Delta(\nu) \neq 0$ на \tilde{P} . Отже, $\tilde{P} \subseteq M$. ■
Введемо у розгляд два класи квазіполіномів. Нехай K_M – клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m Q_j(x) e^{\alpha_j x}, \quad (12)$$

де $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, – поліноми з комплексними коефіцієнтами.

Зауважимо, що кожний квазіполіном $\varphi(x)$ вигляду (12) визначає диференціальну операцію $\varphi(\partial/\partial \nu)$ скінченного порядку на класі цілих функцій $\Phi(\nu)$, а саме:

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \Phi(\nu) = \sum_{j=1}^m Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \Phi(\nu + \alpha_j),$$

зокрема,

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \Phi(\nu) \Big|_{\nu=0} = \sum_{j=1}^m Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \Phi(\nu) \Big|_{\nu=\alpha_j}. \quad (13)$$

Крім того, $K_{\mathbb{C}, M}$ – клас квазіполіномів

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^N P_{lj}(t, x) e^{\beta_l t + \alpha_j x},$$

де $P_{lj}(t, x)$ – поліноми змінних t та x з комплексними коефіцієнтами, $\beta_l \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M$, $\beta_r \neq \beta_l$ для $r \neq l$, $r, l = 1, \dots, N$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ для $k \neq j$, $k, j = 1, \dots, m$, $m, N \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Нехай праві частини $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ інтегральних умов (2) належать до класу K_M , де M – множина (9). Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C}, M}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який можна знайти за формулою

$$U(t, x) = \sum_{j=1}^2 \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0}. \quad (14)$$

□ *Доведення.* Якщо $\varphi \in K_M$, а $T(t, \nu)$ – розв’язок рівняння (3), то згідно з (13) функція $\varphi(\partial/\partial\nu)\{T(t, \nu)e^{\nu x}\}|_{\nu=0}$ належить до $K_{C, M}$. Тоді для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$ за формулою (14) одержуємо, що $U(t, x)$ є квазіполіномом з класу $K_{C, M}$. Використовуючи рівність $a(\partial/\partial x)e^{\nu x} = a(\nu)e^{\nu x}$, покажемо, що функція (14) задовольняє рівняння (1):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} - a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 U(t, x) = \\ & = \left[\frac{\partial}{\partial t} - a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} - a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ e^{\nu x} \left[\frac{d}{dt} - a(\nu) \right]^2 \widehat{T}_j(t, \nu) \right\} \Big|_{\nu=0} = 0. \end{aligned}$$

Перша з інтегральних умов (2) для функції (14) випливає з властивості (5):

$$\begin{aligned} & \int_0^h U(t, x) dt = \\ & = \int_0^h \left(\sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} \right) dt = \\ & = \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \int_0^h \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} dt \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ e^{\nu x} \int_0^h \widehat{T}_j(t, \nu) dt \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ & = \varphi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) e^{\nu x} \Big|_{\nu=0} = \varphi_1(x) e^{\nu x} \Big|_{\nu=0} = \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Аналогічно з властивості (6) маємо виконання другої інтегральної умови (2):

$$\begin{aligned} & \int_0^h t U(t, x) dt = \\ & = \int_0^h \left(\sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ t \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} \right) dt = \\ & = \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \int_0^h t \widehat{T}_j(t, \nu) e^{\nu x} dt \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ e^{\nu x} \int_0^h t \widehat{T}_j(t, \nu) dt \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ & = \varphi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) e^{\nu x} \Big|_{\nu=0} = \varphi_2(x) e^{\nu x} \Big|_{\nu=0} = \varphi_2(x). \end{aligned}$$

Доведемо методом від супротивного єдиність розв’язку задачі (1), (2) у парі класів $K_M, K_{C, M}$.

Припустимо, що для деяких $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$ у класі $K_{C, M}$ існують два розв’язки U_1, U_2 задачі (1), (2) у смузі S_h . Тоді їх можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} U_1(t, x) &= \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \widehat{T}_{1j}(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0}, \\ U_2(t, x) &= \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \widehat{T}_{2j}(t, \nu) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0}, \end{aligned}$$

де $\widehat{T}_{1j}(t, \nu), \widehat{T}_{2j}(t, \nu), j = 1, 2$, – деякі розв’язки рівняння (3).

Різниця цих функцій

$$\begin{aligned} V(t, x) &\equiv U_1(t, x) - U_2(t, x) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \left(\widehat{T}_{1j}(t, \nu) - \widehat{T}_{2j}(t, \nu) \right) e^{\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} \end{aligned}$$

задовольняє у смузі S_h рівняння (1) і нульові інтегральні умови

$$\int_0^h V(t, x) dt = 0, \quad \int_0^h t V(t, x) dt = 0. \quad (15)$$

Оскільки $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$, то згідно з (14) квазіполіном $V(t, x)$ належить до класу $K_{C, M}$. Цей квазіполіном містить значення функцій $\widehat{T}_{11}(t, \nu) - \widehat{T}_{21}(t, \nu), \widehat{T}_{12}(t, \nu) - \widehat{T}_{22}(t, \nu)$ та їх відповідних похідних за ν в точках (t, ν) , де $\nu \in M, t \in [0, h]$. З умови (15) одержуємо, що різниці функцій $\widehat{T}_{11}(t, \nu) - \widehat{T}_{21}(t, \nu), \widehat{T}_{12}(t, \nu) - \widehat{T}_{22}(t, \nu)$ задовольняють умови леми 1. Тому згідно з цією лемою одержуємо рівності функцій $\widehat{T}_{11}(t, \nu) = \widehat{T}_{21}(t, \nu), \widehat{T}_{12}(t, \nu) = \widehat{T}_{22}(t, \nu)$ та їх похідних за ν в точках (t, ν) . Отже, $V(t, x) \equiv 0$ у смузі S_h , тобто $U_1(t, x) = U_2(t, x)$. ■

Зауваження 1. Якщо $0 \in M$, то клас існування розв’язку задачі (1), (2) можна значно розширити, вважаючи, що $\varphi_1, \varphi_2 \in A_{(1)} \cup K_M$, де $A_{(1)}$ – клас цілих функцій порядку нижче від першого.

III. Приклади

Приклад 1. Знайти розв’язок задачі у смузі S_1 з інтегральними умовами для бікалоричного рівняння

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^2 U(t, x) = 0, \\ & \int_0^1 U(t, x) dt = e^{-x}, \quad \int_0^1 t U(t, x) dt = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Маємо $a(\nu) = \nu^2, h = 1, \varphi_1(x) = e^{-x}, \varphi_2(x) = 1$. Для квазіполіномів e^{-x} та 1 показники в експонентах – числа -1 та 0 – належать до множини P , а тому за

лемою 2 належать до M . Отже, умови теореми 1 виконуються. Тоді маємо

$$I_0(\nu) = \frac{e^{\nu^2} - 1}{\nu^2}, \quad I_1(\nu) = \frac{\nu^2 I_0(\nu) + 1 - I_0(\nu)}{\nu^2},$$

$$I_2(\nu) = \frac{\nu^4 I_0(\nu) + \nu^2 - 2\nu^2 I_0(\nu) - 2 + 2I_0(\nu)}{\nu^2}.$$

За формулою (14) знаходимо розв'язок задачі (16):

$$U(t, x) = e^{-\frac{\partial}{\partial \nu}} \left\{ \frac{I_2(\nu) - tI_1(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{\nu^2 t + \nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} +$$

$$+ \left\{ \frac{-I_1(\nu) + tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{\nu^2 t + \nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{I_2(-1) - tI_1(-1)}{\Delta(-1)} e^{t-x} + \frac{-I_1(0) + tI_0(0)}{\Delta(0)}.$$

Використовуючи рівності

$$I_0(-1) = e - 1,$$

$$I_1(-1) = \frac{e - 1 + 1 - (e - 1)}{1} = 1,$$

$$I_2(-1) = e - 1 + 1 - 2(e - 1) - 2 + 2(e - 1) = e - 2,$$

$$\Delta(-1) = e^2 - 3e + 1,$$

$$I_0(0) = 1, \quad I_1(0) = \frac{1}{2},$$

$$\Delta(0) = \frac{1}{12},$$

маємо шуканий розв'язок задачі (16)

$$U(t, x) = \frac{e - 2 - t}{e^2 - 3e + 1} e^{t-x} + 12t - 6.$$

Приклад 2. Знайти у смугі S_1 розв'язок задачі з інтегральними умовами для диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, x) - 2 \frac{\partial}{\partial t} U(t, x + 1) + U(t, x + 2) = 0, \quad (17)$$

$$\int_0^1 U(t, x) dt = e^{2x}, \quad \int_0^1 t U(t, x) dt = 0. \quad (18)$$

Запишемо рівняння (17) як диференціальне рівняння нескінченного порядку за просторовою координатою:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - e^{\frac{\partial}{\partial x}} \right)^2 U(t, x) = 0.$$

Маємо $a(\nu) = e^\nu$, $h = 1$, $\varphi_1(x) = e^{2x}$, $\varphi_2(x) = 0$. Для квазіполінома e^{2x} показник в експоненті – число 2 – належить до множини P , а тому за лемою 2 належить до M . Отже, умови теореми 1 виконуються. Тому

$$I_0(\nu) = \frac{e^{e^\nu} - 1}{e^\nu}, \quad I_1(\nu) = \frac{e^\nu I_0(\nu) + 1 - I_0(\nu)}{e^\nu},$$

$$I_2(\nu) = \frac{e^{2\nu} I_0(\nu) + e^\nu - 2e^\nu I_0(\nu) - 2 + 2I_0(\nu)}{e^\nu}.$$

За формулою (14) маємо

$$U(t, x) = e^{2\frac{\partial}{\partial \nu}} \left\{ \frac{I_2(\nu) - tI_1(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{\nu^2 t + \nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{I_2(2) - tI_1(2)}{\Delta(2)} e^{e^2 t + 2x}.$$

Обчислюємо

$$I_1(2) = \frac{e^2 I_0(2) + 1 - I_0(2)}{e^2} = \frac{(e^2 - 1) \frac{e^{e^2} - 1}{e^2} + 1}{e^2} =$$

$$= \frac{e^{e^2} (e^2 - 1) + 1}{e^4};$$

$$I_2(2) = \frac{e^4 I_0(2) + e^2 - 2e^2 I_0(2) - 2 + 2I_0(2)}{e^2} =$$

$$= \frac{(e^4 - 2e^2 + 2) I_0(2) + e^2 - 2}{e^2} =$$

$$= \frac{(e^4 - 2e^2 + 2) \frac{e^{e^2} - 1}{e^2} + e^2 - 2}{e^2} =$$

$$= \frac{(e^4 - 2e^2 + 2) e^{e^2} - 2}{e^4};$$

$$\Delta(2) = \frac{(e^{e^2} - 1)^2 - e^{e^2 + 4}}{e^8}.$$

Знаходимо розв'язок задачі (17), (18) у вигляді

$$U(t, x) = \frac{(e^4 - 2e^2 + 2) e^{e^2} - 2 - t \frac{e^{e^2} (e^2 - 1) + 1}{e^4}}{(e^{e^2} - 1)^2 - e^{e^2 + 4}} e^{e^2 t + 2x} =$$

$$= \frac{(e^4 - 2e^2 + 2) e^{e^2} - 2 - t (e^{e^2} (e^2 - 1) + 1)}{(e^{e^2} - 1)^2 - e^{e^2 + 4}} e^{e^2 t + 2x + 4}.$$

Приклад 3. Знайти у смугі S_1 розв'язок задачі з інтегральними умовами

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right]^2 U(t, x) = 0,$$

$$\int_0^1 U(t, x) dt = 0, \quad \int_0^1 t U(t, x) dt = e^x \sin x. \quad (19)$$

Маємо $a(\nu) = \nu^2 - 1$, $h = 1$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = e^x \sin x$. Для квазіполінома $e^x \sin x$ показники в експонентах – числа $1 \pm i$ – не належать до множин P та \tilde{P} , але належать до M , оскільки

$$a(1 \pm i) = -1 \pm 2i,$$

$$\Delta(1 \pm i) = \frac{(e^{-1 \pm 2i} - 1)^2 - (-1 \pm 2i)^2 e^{-1 \pm 2i}}{(-1 \pm 2i)^4} \approx$$

$$\approx -0,0081 \pm 0,0265 i \neq 0.$$

Отже, умови теореми 1 виконуються. Тоді маємо де

$$I_0(\nu) = \frac{e^{\nu^2-1} - 1}{\nu^2 - 1},$$

$$I_1(\nu) = \frac{(\nu^2 - 1)I_0(\nu) + 1 - I_0(\nu)}{\nu^2 - 1},$$

$$I_2(\nu) = \frac{(\nu^2 - 1)^2 I_0(\nu) + \nu^2 - 1}{\nu^2 - 1} + \frac{-2(\nu^2 - 1)I_0(\nu) - 2 + 2I_0(\nu)}{\nu^2 - 1}.$$

$$A = \operatorname{Re} \frac{-I_1(1+i) + tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)},$$

$$B = \operatorname{Im} \frac{-I_1(1+i) + tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)}.$$

Використаємо формулу (14)

$$U(t, x) = e^{\frac{\partial}{\partial \nu}} \sin \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{-I_1(\nu) + tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{(\nu^2-1)t+\nu x} \right\} \Big|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{-I_1(\nu) + tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{(\nu^2-1)t+\nu x} \right\} \Big|_{\nu=1+i} -$$

$$- \frac{1}{2i} \left\{ \frac{-I_1(\nu) + tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)} e^{(\nu^2-1)t+\nu x} \right\} \Big|_{\nu=1-i} =$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{-I_1(1+i) + tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)} e^{(2i-1)t+(1+i)x} - \right.$$

$$\left. - \frac{-I_1(1-i) + tI_0(1-i)}{\Delta(1-i)} e^{(-2i-1)t+(1-i)x} \right\} =$$

$$= \frac{e^{x-t}}{2i} \left\{ \frac{-I_1(1+i) + tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)} e^{i(x+2t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{-I_1(1-i) + tI_0(1-i)}{\Delta(1-i)} e^{-i(x+2t)} \right\} =$$

$$= \frac{e^{x-t}}{2i} \left\{ (A + Bi)e^{i(x+2t)} - (A - Bi)e^{-i(x+2t)} \right\} =$$

$$= e^{x-t} \{ A \sin(x + 2t) + B \cos(x + 2t) \},$$

Висновки

Для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовою координатою з неоднорідними інтегральними часовими умовами знайдено клас існування та єдиності розв'язку задачі. Цей клас містить функції квазіполіномного вигляду. При цьому розв'язок задачі зображено за допомогою диференціально-символьного методу як результати дій диференціальних виразів на класично відокремлені розв'язки однорідного рівняння з прийняттям після дії виразів параметра (за яким діють вирази), таким, що дорівнює нулеві. Символами диференціальних виразів є праві частини інтегральних умов.

Інтерес становить у подальших дослідженнях вивчення аналогічної задачі для неоднорідного рівняння з однорідними інтегральними умовами та дослідження ядра задачі.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

Література

- [1] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №2. – С. 294–304.
- [2] Ільків В.С., Магеровська Т.В. Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. нац. ун-ту “Львів. політехніка”. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12–19.
- [3] Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2002. – 292 с.
- [4] Каленюк П.І., Нитребич З.М., Когут І.В. Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісн. нац. ун-ту “Львів. політехніка”. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 5–11.
- [5] Медвідь О.М., Симотюк М.М. Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–140.
- [6] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
- [7] Попов А.Ю., Тихонов И.В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.
- [8] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.
- [9] Фардигола Л. В. Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.
- [10] Bouziani A. Initial boundary-value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **291**. – P. 371–386.

- [11] Cannon J. R. The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.* – 1963. – **21**. – P. 155–160.
- [12] Dao-Qing Dai, Yu Huang. On a mixed problem with integral conditions for one-dimensional parabolic equation // *Appl. Anal.* – 2006. – **85**, No. 9. – P. 1113–1121.
- [13] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
- [14] Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M. Problem with integral condition for a partial differential equation of the first order with respect to time // *J. Math. Sci.* – 2012. – **181**, No. 3. – P. 293–304.
- [15] Mehraliev Y. T., Azizbekov E. I. A non-local boundary-value problem with integral conditions for a second order hyperbolic equations // *J. Quality Measurement and Anal.* – 2011. – **7**, No. 1. – P. 27–40.
- [16] Molaei H. Optimal control and problem with integral boundary conditions // *Int. J. Contemp. Math. Sci.* – 2011. – **6**, No. 48. – P. 2385–2390.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ З ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

Каленюк П. И.^{a,b}, Илькив В. С.^a, Нитребыч З. М.^a, Когут И. В.^a

^a *Национальный университет “Львівська політехніка”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

^b *Жешувский университет,
ул. Рейтана, 16-А, Жешув, 35-959, Польша*

Найден класс однозначной разрешимости задачи с неоднородными интегральными временными условиями для однородного уравнения с частными производными второго порядка по времени, которое обобщает бикалоричное уравнение. В этом классе функций квазиполиномиального вида решение задачи представлено с помощью дифференциально-символьного метода как действие дифференциальных выражений, символами которых есть правые части интегральных условий, на некоторые функции параметров.

Ключевые слова: уравнения с частными производными бесконечного порядка, интегральные условия, бикалоричное уравнение, дифференциально-символьный метод.

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95

UNIQUE SOLVABILITY OF THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER IN TIME

Kalenyuk P. I.^{a,b}, Ilkiv V. S.^a, Nytrebych Z. M.^a, Kohut I. V.^a

^a *National University “Lvivska Politechnika”
12 S. Bandera str., 79013 Lviv, Ukraine*

^b *University of Rzeszów,
16-A Rejtan str., 35-959 Rzeszów, Poland*

We distinguish a class of univalent solvability of the problem with nonhomogeneous integral time conditions for homogeneous partial differential equation of second order in time which generalizes a bicalorical equation. In this class of quasipolynomial functions, the solution of the problem is represented as an action of differential expressions whose symbols are the right-hand sides of the integral conditions, onto certain functions of parameters.

Key words: infinite order PDE, integral conditions, bicalorical equation, differential-symbol method

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95