

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ РЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕНЬЮТОНІВСЬКИХ РІДИН

© Крих Г.Б., 2007

Проаналізовано умови застосування реологічних моделей псевдопластичних і в'язкопластичних рідин та їх параметри, сформовано рекомендації для вибору реологічної моделі конкретної неньютонівської рідини.

The conditions of application of rheological models of pseudoplastic and viscoplastic fluids and their parameters are analysed, recommendations in relation to the selection of model for a particular non-Newtonian fluid are formed.

Постановка проблеми. Серед комплексу фізичних властивостей різних середовищ реологічні (структурно-механічні) властивості є найважливішими. Вони часто передбачають поведінку середовищ в найрізноманітніших технологічних процесах і енергетичних полях і є зовнішнім вираженням внутрішньої сутності об'єктів, тобто характеризують агрегатний стан, дисперсність, будову, структуру і вид взаємодії всередині продукту [1–18].

Сфери застосування реологічних вимірювань в промисловості дуже різноманітні:

- інженерні (гідродинамічний, геометричний, кінематичний) розрахунки технологічного обладнання, насамперед таких, як трубопроводи, насоси, теплообмінники тощо;
- визначення функціональних можливостей інгредієнтів під час розробки продукту;
- контроль якості напівфабрикатів і кінцевих продуктів;
- випробування властивостей матеріалів під час збереження;
- оцінка структури продукту з кореляцією його якісних показників;
- аналіз реологічних рівнянь стану або фундаментальних рівнянь.

До основних реологічних властивостей матеріалів належать: пружність, пластичність, в'язкість, міцність. Серед неньютонівських рідин зустрічаються матеріали, різноманітні за своїми реологічними властивостями. В одного і того самого матеріалу залежно від його стану і умов навантаження виявляються різні реологічні властивості. Відомо багато випадків, коли в процесі технологічної обробки один і той самий продукт переходить із одного реологічного стану в інший, часто протилежний за своїми властивостями до першого. Наприклад, в харчовій індустрії шоколад під час відливання у форму піддається охолодженню і переходить із в'язкого (плинного) стану в твердий; макаронне тісто за раптової дії навантаження поводить себе переважно як пружне тіло; за повільних навантажень виявляються в'язкі та пластичні властивості [18]. Тому насамперед необхідно з'ясувати, які властивості досліджуваного матеріалу за заданих умов деформації є основними. Саме тому вдосконалення усього технологічного комплексу неможливе без врахування реологічних властивостей речовин в тому діапазоні напружень (зсуву), які застосовуються в технологічних апаратах. Дані реологічних вимірювань дають змогу інтенсифікувати технологічні процеси і забезпечують необхідний об'єм виробництва продукції з одночасним покращанням їх якості.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для повного опису стану стиску і деформації матеріальний потік слід розглядати в трьох вимірах (рис. 1). Для опису усталеного простого стійкого зсуву рідини одну з осей в Декартовій системі координат можна спрямувати за напрямом течії (наприклад x_1), тоді тензор стиску може бути записаний так:

$$|\tau| = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

де $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ – нормальні напруження; τ_{12} – тангенціальні напруження: індексом 1 позначений напрям течії, індексом 2 – напрям, перпендикулярний до течії (тобто напрям градієнта швидкості), а індексом 3 – нейтральна вісь.

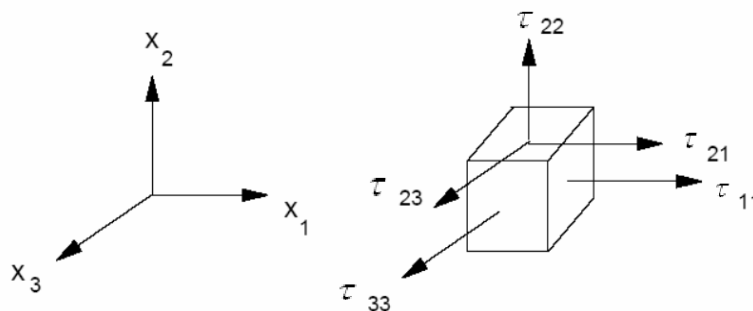


Рис. 1. Стан напруження елемента

Простий зсунутий потік ще називається віскозиметричною течією. Він включає осьовий потік в трубі, ротаційний потік між концентричними циліндрами, ротаційний потік між конусом і пластиною і ротаційний потік між паралельними пластинами. Віскозиметрична течія дає змогу визначити три характеристики: в'язкість $\eta(\dot{\gamma})$, перший та другий коефіцієнти нормальних напружень $\psi_1(\dot{\gamma})$ та $\psi_2(\dot{\gamma})$, які математично визначаються так:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}}, \quad \psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{(\dot{\gamma})^2} = \frac{N_1}{(\dot{\gamma})^2}, \quad \psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{(\dot{\gamma})^2} = \frac{N_2}{(\dot{\gamma})^2}, \quad (2)$$

де $N_1 = \tau_{11} - \tau_{22}$ – перша та $N_2 = \tau_{22} - \tau_{33}$ – друга різниці нормальних напружень. Вказані характеристики визначаються лише природою речовини і не залежать від характеру течії. Коефіцієнт N_1 є завжди додатний і приблизно у 10 разів більший, ніж N_2 . Вимірювання коефіцієнта N_2 є доволі складним, і тому коли його приймають таким, що дорівнює нулю, то це вважається прийнятним. Конкретний вигляд трьох характеристик $\eta(\dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma})$ та $\psi_2(\dot{\gamma})$ залежить від прийнятої реологічної моделі рідини. Тому вигляд функцій (2) використовується для класифікації рідин [16].

Рідина є ньютонівською, якщо в'язкість $\eta(\dot{\gamma})$ є постійною, а перша та друга нормальні різниці напружень дорівнюють нулю:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \text{const}; \quad (3)$$

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0. \quad (4)$$

Рідина називається неньютонівською непружною, якщо її в'язкість залежить від швидкості зсуву, а коефіцієнти нормальних напружень дорівнюють нулю. У в'язкопружних рідинах в'язкість $\eta(\dot{\gamma})$, перший та другий коефіцієнти нормальних напружень $\psi_1(\dot{\gamma})$, $\psi_2(\dot{\gamma})$ залежать від швидкості зсуву і такі рідини одночасно виявляють в'язку поведінку (властиву рідинам) та пружну поведінку (властиву твердим тілам). Така поведінка матеріальних потоків може призвести до деяких проблем під час дослідження реологічних властивостей. Ці проблеми особливо поширені в галузях промисловості, що пов'язані з переробкою пластмас. Також вони виникають і під час дослідження харчових продуктів типу тіста [18]. Для того, щоб одержати первинні дані нормальних напружень, найчастіше використовують ротаційні віскозиметри із системою типу конус-пластина. Для вимірювання вказаних характеристик розроблено досить багато приладів. Одержання точних даних для деяких матеріалів ускладнене різними чинниками, такими як присутність напружень в матеріалі, залежність поведінки матеріалу від часу, хімічні реакції, що перебігають під час обробки матеріалу. Наприклад, у харчовій промисловості найбільш важливою характеристикою рідких харчових потоків є в'язкість. Пружна поведінка багатьох харчових продуктів є доволі незначною і

дані їх нормальних напружень широко не використовуються, нею можна знехтувати (матеріали типу тіста є винятком). Основною областю досліджень для цих матеріалів є в'язкість, яка характеризує залежність між напруженням зсуву і швидкістю зсуву і встановлюється з експериментальних даних. Найпростіший вигляд цієї залежності мають ньютонівські рідини, в яких дотичне напруження зсуву τ за певної температури пропорційне до швидкості зсуву $\dot{\gamma}$:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (5)$$

звідки динамічна в'язкість μ математично може бути визначена за такою формулою:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (6)$$

Як зрозуміло з рівняння (5), в'язкість μ є константою пропорційності між τ і $\dot{\gamma}$, вона не залежить від швидкості зсуву, а змінюється залежно від температури та тиску у цій системі. Величина, обернена до в'язкості, називається текучістю. Графік залежності між напруженням зсуву і швидкістю зсуву називають кривою течії або реологічною кривою. Для ньютонівських рідин залежність дотичного напруження зсуву від швидкості зсуву є прямою лінією з початком в нулі (рис. 2).

Під час вивчення малов'язких рідин (наприклад, розчинів малої концентрації), коли необхідно враховувати масу вимірюваного середовища, переважно визначають кінематичну в'язкість ν , що дорівнює відношенню динамічної в'язкості μ до густини ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (7)$$

Усі гази, рідини і однорідні суміші рідин, що мають невелику в'язкість, в значному інтервалі зміни тиску виявляють ньютонівську поведінку. Інформацію про в'язкість рідин отримують переважно емпіричним шляхом. Жодна теорія не дає простої залежності, яка б уможливила визначати в'язкість рідин априорі, тому за відсутності експериментальних даних доводиться користуватись в багатьох випадках неточними методами розрахунку в'язкості. Ці методи не суперечать теорії, вони дають змогу апроксимувати деякі невідомі або ті, що не піддаються розрахунку теоретичні константи за структурними характеристиками або за іншими фізичними властивостями рідин. Численні теоретичні дослідження в'язкості ґрунтуються на залежності між в'язкістю рідини та структурою її молекул [17]. Кількісна закономірність полягає в тому, що збільшення молекулярної маси, ступеня розгалуженості або здатності молекул асоціюватись із сусідніми призводить до збільшення значення в'язкості і чутливості до температурних змін [17]. Слід зазначити, що усі запропоновані залежності є також емпіричними і, на жаль, серед них немає жодної надійної, яка б давала можливість визначати в'язкість за відсутності експериментальних даних. Експериментально доведено, що в'язкість рідин знижується із зростанням температури і збільшується з підвищенням тиску, але це проявляється за достатньо високих тисків (більших, ніж 100 МПа). Теоретичні дослідження визначення в'язкості сумішей рідин є ще більш складною задачею, яка сьогодні ще не розв'язана.

В природі є багато матеріалів, які не підпорядковуються закону Ньютона (5); їх в'язкість за заданих температур та тиску не залишається постійною і залежить від швидкості деформації, від передісторії матеріалу, тому залежність напруження від швидкості зсуву має нелінійний характер. Такі матеріали називаються неньютонівськими (аномальними). Відношення дотичного напруження зсуву до швидкості зсуву в цих матеріалах називають ефективною в'язкістю:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (8)$$

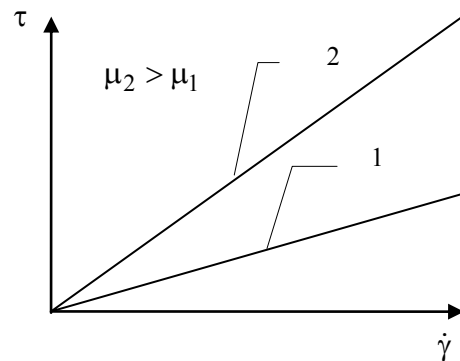


Рис. 2. Криві течії ньютонівських рідин

Формулювання цілі статті. Метою роботи є аналіз існуючих реологічних моделей матеріалів, крива течії яких є нелінійною і швидкість зсуву в кожній точці є деякою функцією тільки напруження в цій самій точці. До таких матеріалів належать неньютонівські матеріали, течія яких не залежить від часу. Далі, на основі такого аналізу важливо згрупувати моделі, що описують рідини з подібними кривими течії і вибрати в кожній групі реологічну модель, яка б була зручною для практичного застосування і водночас описувала властивості рідини в достатньо широкому діапазоні швидкостей зсуву.

Виклад основного матеріалу Течія більшості неньютонівських матеріалів починається за найменших значень напруження зсуву, і їх криві течії мають лінійну залежність між напруженням і швидкістю зсуву тільки за дуже малих (в'язкість η_0) і дуже великих (в'язкість η_∞) значень швидкості. Аномалія в'язкості пов'язана зі структурою рідини та її зміною під час течії. За малих швидкостей зсуву структура руйнується і повністю відновлюється, при цьому рідина має найбільшу в'язкість; із збільшенням швидкості зсуву руйнування структури починає переважати над відновленням, в'язкість різко зменшується; за великих швидкостей течії структура повністю руйнується, рідина має найменшу (ньютонівську) в'язкість. Відомо, що течія матеріалу залежить від його фізико-хімічних властивостей: від форми і розташування молекул, концентрації, температури, вологості тощо. Під час додавання інгредієнтів до чистого розчинника, тобто за підвищення концентрації, можна збільшити в'язкість речовини і тим самим змінити характер її руху. В'язкість, наприклад, розчинів високомолекулярних речовин із підвищенням напруження знижується. Такий потік називають псевдопластичним або суто в'язким. Псевдопластична поведінка є характерною для багатьох харчових продуктів, розплавлених полімерів, косметичних виробів, туалетних засобів тощо. Під час течії ці матеріали перебувають в



Рис. 3. Реологічна крива псевдопластичної течії

трьох різних областях: нижня ньютонівська область, де в'язкість $\eta_0 = \text{tg}(\alpha_0)$, називається граничною в'язкістю за нульової швидкості зсуву і залишається постійною із зміною швидкостей зсуву; середня область, де в'язкість η поступово зменшується із збільшенням швидкості зсуву; верхня ньютонівська область, де в'язкість $\eta_\infty = \text{tg}(\alpha_\infty)$ називається граничною в'язкістю за нескінченної швидкості зсуву. Найчастіше досліджується середня область. Нижня ньютонівська область може досліджуватись тоді, коли швидкості зсуву є незначні, наприклад в рідинах, в яких осаджуються тверді частинки.

Можливий інший характер псевдопластичної течії, який характеризується ньютонівською в'язкістю лише за низьких швидкостей зсуву (рис. 4, а). Або можлива течія з викривленою реологічною кривою за малих швидкостей зсуву (рис. 4, б), яку однак не можна віднести до пластичної течії. Визначення в'язкості η_∞ (за $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$) для такої течії можливе тільки наближено, оскільки за високих швидкостей зсуву практично завжди виділяється тепло і виникає турбулентний потік. Зустрічаються і такі псевдопластичні речовини, у яких пропорційність між τ і $\dot{\gamma}$ спостерігається тільки за дуже високих швидкостей зсуву (рис. 4, в).

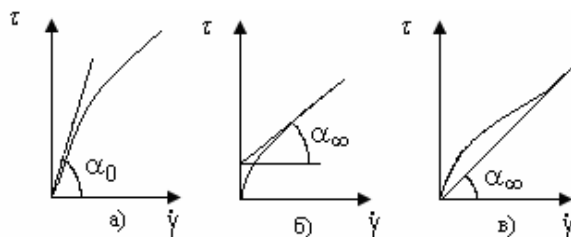


Рис. 4. Реологічні криві течії псевдопластичних матеріалів

Крім псевдопластичної течії, існує також і дилатантна течія речовин, у яких з підвищенням напруження (швидкості зсуву) непропорційно збільшується в'язкість (рис. 5, крива 2). За дуже високих напружень в'язкість може стати нескінченно великою, що призведе до руйнування речовини. Дилатантні матеріали в інженерній практиці зустрічаються значно рідше, ніж псевдопластичні. Прикладом таких речовин серед харчових матеріалів є згущене молоко, деякі розчини кукурудзяного борошна, цукру і крохмалю, полімерний клей для сигарет, деякі види меду.

Істотний внесок в реологію, насамперед в області кількісного опису процесів деформації і течії різних типів систем і створення різних математичних моделей для різних матеріалів, було зроблено Максвеллом, Кельвіном, Стоксом, Файгтом, Сен-Венаном, Бінгамом [1, 4, 18].

Реологічне рівняння будь-якого матеріалу виражає залежність між напруженням зсуву τ , викликаним деформаціями γ , та їх похідними в часі:

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots). \quad (9)$$

Скалярні параметри цього рівняння, що характеризують реологічні властивості матеріалу, називаються реологічними константами (модулями, параметрами, коефіцієнтами), а напруження деформації і їх похідні є реологічними змінними. Загалом реологічні константи залежать від кількох нерологічних величин (наприклад, характеристик температурного поля) та від деяких інваріантів напруження (чи деформації), внаслідок чого реологічні рівняння можуть мати нелінійний характер. Реологічні рівняння є математичними моделями, що відображають поведінку реальних тіл і мають істотне значення для опису загальних закономірностей процесів деформації структур.

Розглянемо найпоширеніші в інженерній практиці реологічні рівняння, що описують течію псевдопластичних рідин. Найчастіше застосовується степенева модель Оствальда:

$$\tau = K\dot{\gamma}^n. \quad (10)$$

Рівняння (10) має дві константи: K – коефіцієнт (або показник) консистенції і n – індекс течії (або показник поведінки). Коефіцієнт K найбільш чутливий (порівняно з n) до зміни температури матеріалу. З рівняння (10) можна побачити, що за $n = 1$ воно зводиться до звичайної форми закону Ньютона (5), при цьому $\eta = \mu = K$, а відхилення показника n від одиниці вказує на ступінь неньютонівської поведінки рідини. За $n < 1$ рідина є псевдопластичною і рівняння (10) описує криву 1, показану на рис. 5. В логарифмічних координатах залежність τ від $\dot{\gamma}$ для багатьох неньютонівських матеріалів часто є лінійною в досить широкому діапазоні швидкостей зсуву, чим і пояснюється широке застосування степеневого рівняння. Ефективна в'язкість степеневої рідини визначається за формулою $\eta = \frac{K}{\dot{\gamma}^{1-n}}$. За нульової швидкості зсуву в'язкість η_0 стає нескінченно великою. Однак на практиці кінцеве значення цієї в'язкості знаходять за тангенсом кута нахилу дотичної до кривої течії в точці $\dot{\gamma} = 0$. Оскільки для псевдопластичних матеріалів $n < 1$, то із зростанням швидкості зсуву ефективна в'язкість зменшується. Цю реологічну властивість пояснюють тим, що в нерухомому середовищі розміщення частинок характеризується значною хаотичністю, а під дією зростаючих сил зсуву відбувається все більша орієнтація частинок суспензії чи розгортання ланцюгів полімерів в напрямку течії, внаслідок чого течія зазнає мінімального опору. З підвищенням швидкості також зменшується взаємодія між частинками. Зазначені явища відбуваються в матеріалі так швидко, що їх неможливо дослідити в часі за допомогою звичайних вимірювальних засобів.

Рівняння (10) описує експериментальні криві течії більшості неньютонівських непластичних рідин в діапазоні помірних швидкостей деформації. За дуже низьких чи дуже високих значень

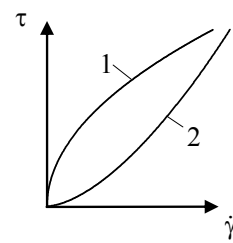


Рис. 5. Реологічні криві: псевдопластичного (1) і дилатантного (2) матеріалів

швидкостей деформації криві течії можуть бути лінеаризовані і подані звичайним рівнянням закону Ньютона. Відповідно значення констант степеневі моделі справедливі тільки для певного діапазону швидкостей зсуву.

За допомогою степеневі моделі можна описати поведінку деяких емульсій, паст, фармацевтичних і біологічних препаратів, полімерних розчинів, друкарських фарб, мильних розчинів тощо. Степеневий закон дуже поширений для опису в'язкості різноманітних харчових матеріалів і продуктів: томатних паст, цукрових сиропів, фруктових пюре, концентрованих соків, хлібопекарного тіста, шоколадних мас, крохмальних суспензій, майонезу, жирів тощо.

Однак степенева модель (10) має багато недоліків: відсутність фізичного змісту за граничних значень швидкості зсуву ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$ і $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$), за лінійної апроксимації нелінійних кривих течії в логарифмічних координатах в значення констант вносяться значні похибки, що знижує точність реологічних розрахунків.

Серед інших моделей, що описують псевдопластичну поведінку рідин, відомі як емпіричні, так і теоретично обґрунтовані моделі [1, 2, 18, 20–22]. Вони є більш складними і містять три і більше реологічних параметрів. Деякі реологічні моделі рідин зведені в таблицю.

Реологічні моделі псевдопластичних та в'язкопластичних рідин¹

№ з/п	Автор моделі	Рівняння	Рідина	Література
1	2	3	4	5
1	Ньютон	$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}$	Вода, водні розчини солей, спирти, кислоти, гліцерин	[1, 2, 18]
2	Оствальд	$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n$, $0 < n < 1$	Силікати, мастила, високополімерні розчини, харчові матеріали	[1, 16, 20–23]
3	Еліс	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{n-1}} \cdot \dot{\gamma}$	Органозолі	[2]
4	Кареу	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{(1 + (K_1 \cdot \dot{\gamma})^2)^{(1-n)/2}} \right) \cdot \dot{\gamma}$	Харчові матеріали, структуровані рідини	[9, 18]
5	Крос	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot \dot{\gamma}^n} \right) \cdot \dot{\gamma}$	Полімерні середовища, колоїдні розчини, харчові матеріали	[10, 18]
6	Рейнер–Філіпов	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \tau^2 / K_1} \right) \cdot \dot{\gamma}$	Розчини каучук, цементні розчини, розчини нітроцелюлози	[1, 2, 13]
7	Ван Вазер	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \dot{\gamma} + K_2 \dot{\gamma}^{n_1}} \right) \cdot \dot{\gamma}$	Золі, полімерні середовища, біологічні рідини	[11, 18]

¹ $\eta_0 = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta$ – ефективна в'язкість за швидкості зсуву, близької до нуля; $\eta_\infty = \text{tg}(\alpha_\infty)$ – в'язкість за дуже високих швидкостей зсуву; $\tau_{1/2}$ – напруження зсуву, за якого $\eta = 0.5\eta_0$; τ_m – напруження зсуву, за якого в'язкість визначається так: $\eta = 0.5(\eta_0 + \eta_\infty)$; C_v – об'ємна частка диспергованої твердої фази; C_1 – константа, яка не залежить від концентрації, але є функцією розподілення і розміру частинок, а також ступеня їх флокуляції; η_1 – в'язкість дисперсійного середовища; K, K_1, K_2, K_3 і n_1, n_2, m – довільні константи і індекси степенів, які визначаються з експериментальних даних. Інші параметри – емпіричні і напівемпіричні константи.

1	2	3	4	5
8	Вайсенберг	$\dot{\gamma} = \frac{\eta_0 \tau}{1 + \tau^2/K_1}$	Структуровані рідини	[1]
9	Де Хавен	$\tau = \frac{\eta_0}{1 + K\tau^2} \cdot \dot{\gamma}$ або $\tau = \frac{\eta_0}{1 + K\tau^n} \cdot \dot{\gamma}$	Полімерні середовища, харчові матеріали	[20, 22]
10	Бріан	$\tau = \eta_\infty \left(1 + \frac{\tau_\infty}{\eta_\infty m \dot{\gamma}}\right)^m \cdot \dot{\gamma}$	Харчові матеріали, біологічні рідини	[20, 22]
11	Вільямсон	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \tau/\tau_m}\right) \cdot \dot{\gamma}$	Мастильні матеріали, нафтопродукти	[2]
12	Мейер	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\tau/\tau_m)^{n-1}}\right) \cdot \dot{\gamma}$	Високомолекулярні сполуки, харчові продукти	[20]
13	Метцнер	$\tau = \left(\frac{\eta_0 + (\tau/\tau_m)^{n-1} \eta_\infty}{1 + (\tau/\tau_m)^{n+1}}\right) \cdot \dot{\gamma}$	Водний розчин золю натрію гідроксицелюлози високої в'язкості	[2]
14	Вільямс	$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{K_1}{K_2 + \dot{\gamma}}\right) \cdot \dot{\gamma}$	Полімерні розчини, харчові матеріали	[20, 22]
15	Еліс	$\dot{\gamma} = K_1 \tau + K_2 \tau^{n_1}$	Розчини каучуку	[1, 4]
16	Рейнер	$\dot{\gamma} = \sum_{i=0}^n a_{2i} \tau^{2i+1}$	Розчини каучуку	[1]
17	Степеневий ряд	$\dot{\gamma} = K_1 \tau + K_2 \tau^3 + K_3 \tau^5 + \dots$ $\tau = K_1 \dot{\gamma} + K_2 \dot{\gamma}^3 + K_3 \dot{\gamma}^5 + \dots$	Органозолі	[8, 18]
18	Сіско	$\tau = K_1 \dot{\gamma} + K_2 \dot{\gamma}^n$	Харчові матеріали	[20]
19	Вільямсон (Рабинович)	$\dot{\gamma} = K_1 \tau + K_2 \tau^2$	Розчин цементу в диаксані, фузол	[1] [(2)]
19	Пауел-Ейрінг	$\tau = K_1 \dot{\gamma} + \frac{1}{K_2} \sinh^{-1}(K_3 \dot{\gamma})$	Розплави полімерів, структуровані рідини	[12, 23]
20	Прандтль-Ейрінг	$\tau = K_1 \sinh^{-1}(\dot{\gamma}/K_2)$	Розплави поліетилену, скла	[2, 23]
21	Кролі-Кітс	$\tau = \eta_l \cdot \frac{1.2 + C_V \cdot (C_1 \cdot \tau^{-0.2} + 1)^3}{1.2 - C_V \cdot (C_1 \cdot \tau^{-0.2} + 1)^3} \cdot \dot{\gamma}$	Мінеральні дисперсії, харчові дисперсії	[20]
22	Бінгам	$\tau = \tau_0 + \eta_p \cdot \dot{\gamma}$	Глинисті, бурові і цементні розчини, будівельні розчини, зубні пасти, смолисті нафти, лакофарбові продукти, харчові матеріали і продукти, суспензії	[14, 15 18, 21, 23]
23	Кесон	$\tau^{0.5} = \tau_0^{0.5} + K_1 \dot{\gamma}^{0.5}$	Друкарські фарби, лакові фарби, лаки, розплавлений молочний шоколад	[3, 18]
24	Модифіковане Кесона	$\tau^{0.5} = \tau_0^{0.5} + K_1 \cdot \dot{\gamma}^{n_1}$	Олійні фарби, друкарські фарби, харчові продукти	[5, 18]
25	Гершель-Балклі	$\tau = \tau_0 + K_1 \dot{\gamma}^n$	Розчини каучуку, лакофарбові продукти, шлами	[18, 19]

1	2	3	4	5
26	Узагальнене Гершеля–Балклі (Кесон–Шульман)	$\tau^{n_1} = \tau_0^{n_1} + K_1 \cdot \dot{\gamma}^{n_2}$ $\left(\tau = \left(\tau_0^{1/n} + (\eta_p \cdot \dot{\gamma})^{1/m} \right)^n \right)$	Наповнені полімери, фарби, харчові маси, концентровані суспензії	[6,19]
27	Вокадло	$\tau = \left(\tau_0^{1/n_1} + K_1 \cdot \dot{\gamma} \right)^{n_1}$	Дисперсні середовища, харчові матеріали	[7]
28	Оствальд	$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n,$ $1 < n < \infty$	Деякі типи меду, 40 % крохмальний зерновий розчин, деякі типи розплавленого молочного шоколаду	[1, 2, 18, 21]

В більшості запропонованих моделей (Еліса, Кареу, Кроса, Рейнера–Філіпова, Ван Вазера, Вайсенберга, Де Хавена, Бріана, Вільямсона, Мейера, Метцнера, Вільямса) реологічними параметрами є граничні значення в'язкості η_0 та η_∞ . Їх застосування пов'язано з труднощами вимірювання граничних значень реологічних параметрів. Зокрема, для визначення η_0 необхідно створювати течію рідини за якомога менших значень напруження зсуву і швидкості зсуву, які важко виміряти з достатньою точністю. Для визначення η_∞ , навпаки, необхідно мати доволі високі швидкості зсуву, за яких умови зсуву рідини порушуються внаслідок турбулізації рідини. Слід зазначити, що точність апроксимації експериментальних реологічних кривих за допомогою будь-якої з трипараметричних, а тим більше моделей з більшою кількістю параметрів, є досить високою. Як приклад, розглянемо апроксимацію експериментальних даних течії 1,5 % водного розчину натрію карбоксиметилцелюлози, отриманих Міделманом за допомогою трубного віскозиметра в діапазоні швидкостей зсуву від 156 до 24320 1/с [18]. Для апроксимації застосовувалась двопараметрична степенева модель (10), чотирипараметрична модель Кроса [9]

$$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot \dot{\gamma}^n} \right) \cdot \dot{\gamma} \quad (11)$$

і модель Кареу [10]

$$\tau = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + (K_1 \cdot \dot{\gamma})^2 \right)^{(1-n)/2}} \right) \cdot \dot{\gamma}, \quad (12)$$

в яких η_0 , η_∞ – граничні значення в'язкості рідини за нульової та нескінченно великої швидкостей зсуву; K_1 , n – довільні параметри моделі. Адекватність моделей оцінювалась за середньоквадратичним відхиленням розрахункових значень напруження зсуву від експериментальних:

$$d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i^p - \tau_i)^2}, \quad (13)$$

де N – кількість експериментальних значень τ ; τ^p – значення напруження зсуву, розраховані за моделлю.

Степенева модель з параметрами $K = 8.3741 \text{ Па} \cdot \text{с}^{0.4143}$, $n = 0.4113$ дає $d = 8.0 \text{ Па}$. Реологічна модель Кроса, за визначених $\eta_0 = 0.8 \text{ Па} \cdot \text{с}$, і $\eta_\infty = 0.006 \text{ Па} \cdot \text{с}$ і параметрів $K_1 = 0.029 \text{ с}^{0.7339}$ і $n = 0.7339$, дає змогу зменшити значення d до 7.0 Па . Для моделі Кареу з $\eta_0 = 0.6 \text{ Па} \cdot \text{с}$ і $\eta_\infty = 0.001 \text{ Па} \cdot \text{с}$ та $K_1 = 0.0106 \text{ с}^2$ і $n = 0.3962$ значення $d = 7.6 \text{ Па}$. Отже, значення середньоквадратичного відхилення, отримані за апроксимації експериментальних даних різними

реологічними моделями, є дуже близькими, і застосування багатопараметричних моделей Кроса, Кареу забезпечують лише деяке зменшення значення d . Інші багатопараметричні реологічні моделі псевдопластичних рідин дають змогу підвищити точність апроксимації, але будь-яке зменшення середньоквадратичного відхилення d на вибір моделі не вплине, оскільки досягнуті значення d знаходяться в межах похибки визначення напруження зсуву.

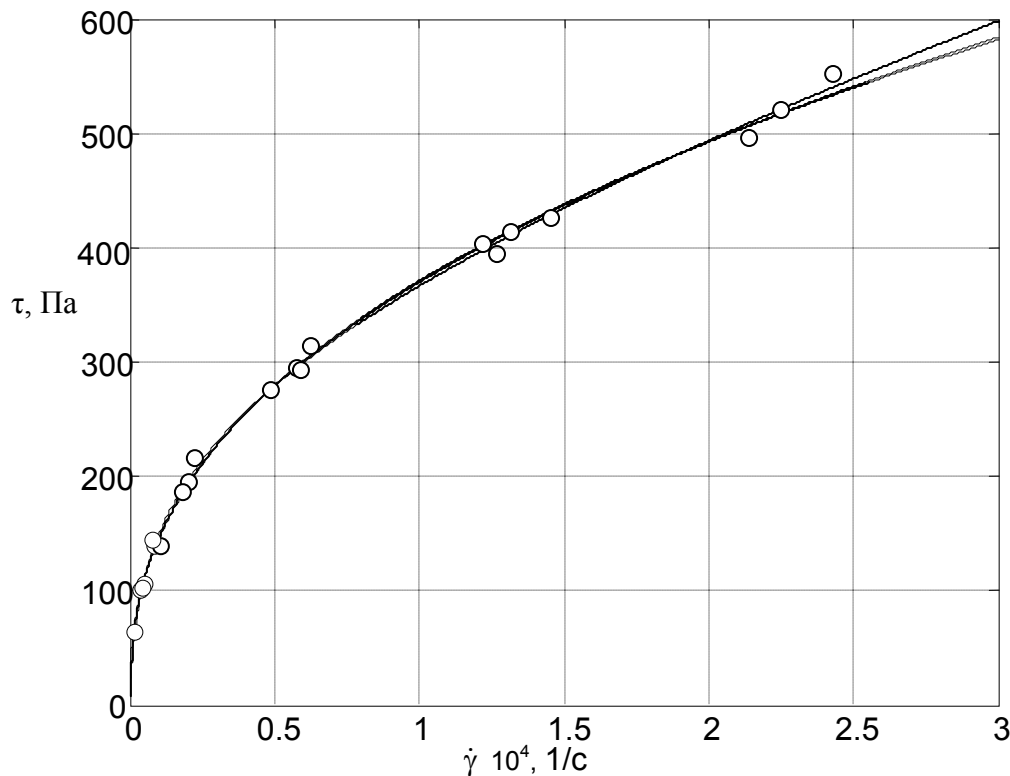


Рис. 6. Апроксимація експериментальних даних [18] реологічними моделями псевдопластичних рідин: Оствальда, Кроса, Кареу

У дисперсних системах залежно від концентрації, а також величини навантаження може виникнути течія, відмінна від течії суто в'язких рідин. За значень напружень, менших за деяке граничне значення, дисперсна система веде себе, як тверде тіло, і пружно деформується. Якщо напруження, що діє на систему, перевищує граничне значення, то виникає течія. Рідини з подібною реологічною поведінкою називають в'язкопластичними. В'язкопластична рідина, в якій після перевищення граничного напруження зсуву спостерігається пропорційність між швидкістю зсуву та напруженням зсуву, називається ідеальною або лінійною в'язкопластичною рідиною. В'язкопластична рідина, в якій під час течії спостерігається непропорційна залежність між швидкістю зсуву і напруженням, називається неідеальною або нелінійною в'язкопластичною рідиною. Фізична поведінка таких матеріалів пояснюється характером їх структури: за напружень, менших від граничного напруження зсуву, течія відсутня. За досягнення граничного напруження зсуву структура в такій рідині руйнується не одразу, а поступово із зростанням швидкості зсуву. Реологічні криві в'язкопластичних рідин показано на рис. 7. Для опису течії лінійної в'язкопластичної рідини Бінгам запропонував рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= 0, \text{ якщо } \tau \leq \tau_0 \text{ (твердий стан),} \\ \tau &= \tau_0 + \eta_p \cdot \dot{\gamma}, \text{ якщо } \tau > \tau_0 \text{ (в'язкопластичний стан).} \end{aligned} \quad (14)$$

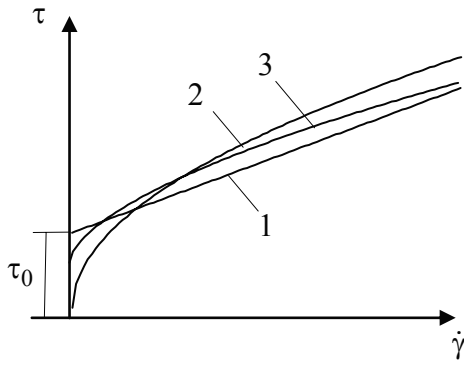


Рис. 7. Реологічні криві в'язкопластичних матеріалів:
1 – лінійної (бінгамівської);
2, 3 – нелінійних

Ця модель має два параметри: τ_0 – граничне напруження зсуву (Па), і η_p – пластична (структурна) в'язкість (Па·с). За $\tau > \tau_0$ структура повністю руйнується і матеріал піддається зсувній течії. Реальні матеріали не зовсім точно виявляють в'язкопластичні властивості, що відповідають моделі Бінгама. Однак, якщо відхилення є незначними, то модель можна використовувати для розрахунку течії в різних елементах. Прикладами систем, що є близькими до моделі Бінгама, є бурові і цементні розчини, будівельні розчини, зубні паста, смолисті нафти, лакофарбові продукти, деякі харчові матеріали і продукти тощо.

Для опису течії нелінійної в'язкопластичної рідини Кесон запропонував таку модель:

$$\tau^{0.5} = \tau_0^{0.5} + K_1 \dot{\gamma}^{0.5}, \quad (15)$$

де τ_0 – граничне напруження по Кесону, Па; K_1 – пластична в'язкість по Кесону, (Па·с)^{0.5}. Кесон допускав, що за рахунок сил взаємодії між частинками дисперсної фази утворюються довгі ланцюги у вигляді ниток, які за малих швидкостей зсуву рухаються як єдине ціле. Із збільшенням швидкості відбувається розрив ниток на маленькі частинки, а за дуже великих швидкостей зсуву вони повністю руйнуються і в'язкість залежить тільки від взаємодії між окремими частинками. Рівнянням Кесона було описано течію крові, друкарських фарб, харчових матеріалів.

Моделі Кесона і Бінгама подібні, тому що обидві мають граничне напруження зсуву. Кожна з них, однак, дає різні значення параметрів рідин, залежно від діапазону, який використовується для математичного аналізу. Найточніше значення граничного напруження зсуву знаходяться під час використання даних за низьких швидкостей зсуву.

До більш складних (трипараметричних) належить модель Гершеля–Балклі, одержана поєднанням в'язкопластичної та степеневі моделей:

$$\tau = \tau_0 + K_1 \dot{\gamma}^n, \quad (16)$$

де n – показник нелінійності.

Якщо експериментальні дані про характер течії рідини в області низьких швидкостей зсуву відсутні, але з інших досліджень аналогічних рідин можна припустити наявність пластичних властивостей, то для апроксимації реологічних кривих в заданому діапазоні швидкостей зсуву можна застосовувати і моделі в'язкопластичних рідин. Проаналізуємо можливості деяких реологічних моделей в'язкопластичних рідин (див. таблицю) для апроксимації тих самих експериментальних даних Міделмана. Порівняємо ефективність застосування моделей Бінгама (14), Кесона (15) і трипараметричних моделей Гершеля–Балклі (16) і Вокадло:

$$\tau = \left(\tau_0^{1/n_1} + K_1 \cdot \dot{\gamma} \right)^{n_1}. \quad (17)$$

Модель Бінгама з параметрами $\tau_0 = 138.1$ Па, $\eta_p = 0.0185$ Па·с забезпечує середньоквадратичне відхилення $d = 39$ Па, для моделі Кесона з параметрами $\tau_0 = 96.5$ Па, $K_1 = 0.0888$ (Па·с)^{0.5} $d = 23.3$ Па, для моделі Гершеля–Балклі – з параметрами $\tau_0 = 1.59$ Па, $K_1 = 8.1372$ Па·с^{0.4139}, $n = 0.4139$ $d = 8.0$ Па і для моделі Вокадло – $\tau_0 = 24.0314$ Па, $K_1 = 157.0320$ Па^{0.4142}·с, $n = 0.4142$ $d = 8.0$ Па. На рис. 8 показано експериментальну та розрахункові реологічні криві за вказаними моделями. Порівнюючи отримані результати, бачимо, що двопараметричні лінійна модель Бінгама і нелінійна модель Кесона мають високу похибку апроксимації. Застосування трипараметричних моделей Гершеля–Балклі, Вокадло забезпечують цілком задовільну апроксимацію і надати перевагу одній з

них за значенням середньоквадратичного відхилення ($d=8.0$ Па) неможливо. Очевидно, що й інші багатопараметричні нелінійні моделі в'язкопластичних рідин забезпечать прийнятну похибку апроксимації. Варто зауважити, що за обраним критерієм адекватними в заданому діапазоні швидкостей зсуву можна вважати як моделі псевдопластичних рідин, так і трипараметричні моделі в'язкопластичних рідин.

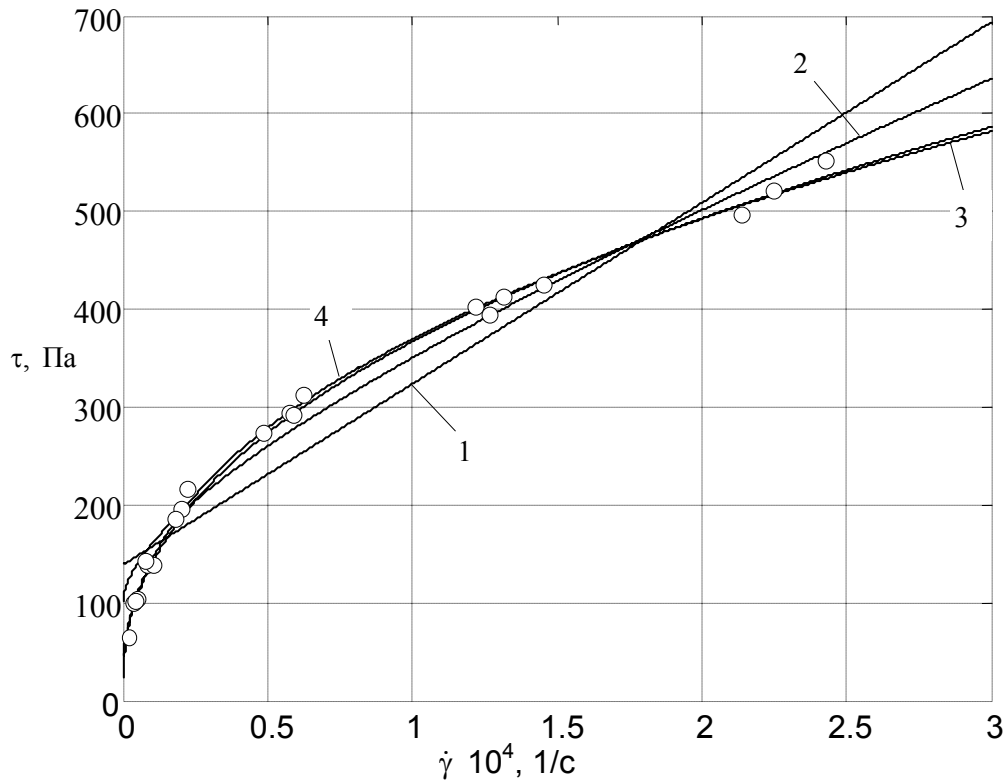


Рис. 8. Апроксимація експериментальних даних [18] реологічними моделями в'язкопластичних рідин:
1 – Бінгама; 2 – Кесона; 3 – Гершеля–Балклі; 4 – Вокадло

Рідше зустрічаються речовини, в'язкість яких збільшується з підвищенням швидкості деформації. Таке явище спостерігається в системах з високою концентрацією твердої фази і в грубих дисперсіях, наприклад, у водних суспензіях з високою концентрацією піску, бариту тощо. Ці матеріали і речовини називаються дилатантними. За дуже високих напружень в'язкість може стати нескінченно великою, що призведе до руйнування речовини. Дилатантна течія (див. рис. 5, крива 2) так само описується рівнянням (10) за $n>1$, яке може бути застосовано для таких харчових матеріалів, як згущене молоко, деякі розчини цукру, крохмалю тощо [18].

Висновки. На вибір реологічної моделі рідини впливає багато чинників. Найбільш поширеними для опису реологічної поведінки псевдопластичної та в'язкопластичної рідин є моделі Оствальда, Бінгама, Балклі–Гершеля. Ці моделі прийняті за базові для інтерпретації течії неньютонівських рідин в різних галузях промисловості. На додаток до них розроблено багато інших моделей, які можуть застосовуватись для опису конкретних неньютонівських рідин. Так, моделі Кроса, Рейнера–Філіпова, Ван Вазера, Пауела–Ейрінга тощо корисні для моделювання псевдопластичних режимів на низьких, середніх і високих швидкостях зсуву. Деякі рівняння, такі як модифіковане рівняння Кесона, узагальнене Балклі–Гершеля корисні для вирішення інженерних проблем в технологічних процесах, де застосовуються в'язкопластичні рідини.

Застосування того чи іншого реологічного рівняння для опису течії реального матеріалу перевіряється експериментально для діапазону швидкостей зсуву, що нас цікавить, і який повинен

відповідати швидкостям зсуву, за яких досліджуваний матеріал застосовується в технологічному процесі. Тому однією із відповідальних і часто складних задач є визначення швидкості зсуву матеріалу в робочих органах технологічних апаратів та машин і відтворення в приладах саме тих швидкостей зсуву, яким він піддається в технологічному обладнанні. Результати апроксимації експериментальних реологічних кривих показують, що одній і тій самій рідині в певному діапазоні швидкостей зсуву може бути підпорядковано декілька реологічних моделей, які за обраним критерієм не поступаються одна одній. В такому разі питання вибору моделі вирішується, враховуючи область застосування моделі, зручності практичного застосування. Але тоді обрану реологічну модель не можна поширювати на інші умови і швидкості деформації.

1. Рейнер М. Деформация и течение. Введение в реологию. – М.: Госуд. науч.-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной литературы, 1962. – 382 с. 2. Каминер А.А., Яхно О.М. Гидромеханика в инженерной практике. – К.: Техніка, 1987. – 175 с. 3. Casson N. A flow equation for pigmented-oil suspension of the printing ink tipe. In Mill C.C. (editor)/ Rheology of Dispersed Systems. Pergamon Press. – New York, 1959. – P. 84–104. 4. Ellis S.B. Thesis laffayette College, Pa. Cited, 1927, in: Whorlow R.W. Rheological Techniques. Halsted Press. – New York, 1980. 5. Mizrahi S., Berk Z. Flow behavior of concentrated orange juice: mathematical treatment // J. Texture Stud. – 1972. – № 3. – P. 69–79. 6. Ofoley R.Y., Morgan R.G. Steffe J.F. A generalized rheological model for inelastic foods // J. texture Stud. – 1987. – № 18. – P. 213–230. 7. Parzonka W., Voadlo J, Méthode de la caractéristique du comportement rhéologique des substances viskoplastiques d'après les mesures au viscomètere de Couette (model nouveau à trois paramètres). Rheol. Acta. 7. – C. 260–265. 8. Whorlow R.W. Rheological Techniques. (Second edition) Ellis Horwood. – New York, 1992. 9. Carreau P.J. Ph.D. Dissertation, 1968. Dept. of Chemical Engineering, University of Wisconsin, Madison. 10. Cross M.M. Rheology of non-Newtonian flow: equation for pseudoplastic systems // J. Colloid, Sci. – 1965. – № 20. – P. 417–437. 11. Van Wazer J.R. Viscosity and Flow Measurement. Interscience Publishers. – New York, 1963. 12. Powell R.E., Eyring H.J. Mechanisms for relaxation theory of viscosity // Nature. – 1944. – № 154. – P. 427–428. 13. Philippoff W. Kolloid-Zeit. – 1935. – № 71. – P. 1–16. in. Brodkey R.S. The Phenomena of Fluid Motions. Addison-Wesley Publishing Co., Menlo Park. – California, 1967. 14. Грей Дж.Р., Дарли Г.С.Г. Состав и свойства буровых агентов (промысловых жидкостей). – М.: Недра, 1985. – 509 с. 15. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения в вязко-пластичных сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. – 416 с. 16. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров. – М.: Химия, 1979. – 368 с. – New York: Academic Press, 1976. 17. Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. – Л.: Химия, 1971. – 704 с. 18. Steffe J.F. Rheological methods in food process engeneering. – 1996. – 418 p. 19. Смольский Б.М., Шульман З.П., Гориславец В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно вязко-пластичных материалов. – Минск: Наука и техника, 1970. – 448 с. 20. Мачихин Ю.А., Мачихин С.А. Инженерная реология пищевых материалов. – М.: Лёгкая и пищевая промышленность, 1981. – 215 с. 21. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964. – 216 с. 22. Маслов А.М. Инженерная реология в пищевой промышленности. – Л.: ЛТИХП МВ и ССО РСФСР, 1997. – 88 с. 23. Круглицкий Н.Н. Основы физико-химической механики. – К.: Выща шк., 1975. – 268 с.