

Finding of Extremum of Functional with an Unknown Parameter at Design of Work of the Wind Turbine

Vitaliy Korendiy

Chair of Mechanics and Automation of Machine Building,
Lviv Polytechnic National University,
UKRAINE, Lviv, Profesorska Street 1,
E-mail: vitaliy_korendiy@mail.ru

Energy of air masses is one of the most perspective types of alternative energy sources. On a background of a permanent price advance on a fossil fuel and other power mediums the research of work, development of new constructions, perfection of methods of calculation and mathematical models of work of cheap wind turbines of small single power, which work at weak average annual winds, are actual at the moment.

In an article we'll stop on the task of optimization of section angle of linear blades and angulator of low-speed wind wheel by the criterion of maximal power takeoff from air flows, which is eliminated to the mathematical task of finding of extremum of functional with an unknown parameter.

Research of rotatory motion of low-speed wind wheel makes the particular scientific interest, the angulator of which changes by means of turn of blades round their axes (fig. 1). In such cases it is necessary to develop the optimal laws of management of section angle depending on speed of air flows.

Equation (12) is deduced for finding of optimal section angle of blades of low-speed wind wheel; the got solutions are analyzed, putting the concrete values of speed of wind, angulator and current radius of blade, and the first solution α_{r1} is accepted for further calculations. It is set, that for providing of permanent frequency of rotation of wind wheel with the change of speed of wind it is necessary to change the section angle of blade. The chart of dependence of section angle α_{r1} from speed of air flows v_n and current radius of area r with maximal angulator of low-speed wind wheel ($d\phi/dt = 40$ turns/min) is given on figure 2.

We put the formula (12) in equation (1) and got dependence of nominal power of wind turbine with linear blades from the angulator of its rotor with preset parameters of flow rate of air and sizes of wind wheel. We integrated it graphically in a programmatic complex MATHEMATICA and found the maximal value of power of wind turbine (i. e. extremum of functional (1)) and optimal angulator of rotation of its rotor with wind speed $v_n = 8$ m/c (fig. 3). It follows from figure 3 that the optimal angulator of rotation of wind wheel is approximately 10 radian/sec or 95 turns/min, when the wind turbine is able to develop power of about 300 W.

The formula (13) is got for determination of maximal value of functional (1) and nominal power of wind turbine is calculated: $N^{om} \approx 230$ W with ($d\phi/dt = 40$ turns/min).

Пошук екстремуму функціонала з невідомим параметром при моделюванні роботи вітроустановки

Віталій Корендій

Кафедра механіки та автоматизації машинобудування,
Національний університет "Львівська політехніка",
УКРАЇНА, м. Львів, вул. Професорська, 1, E-mail:
vitaliy_korendiy@mail.ru

У доповіді наводиться задача розрахунку та оптимізації профільного кута лінійчастих лопатей тихохідного вітроколеса для забезпечення максимального відбору потужності з потоку повітря, яка зводиться до математичної задачі пошуку екстремуму функціонала, що містить невідомий параметр. Подано графічні та аналітичні залежності оптимальних значень вказаного кута від швидкості повітряного потоку та поточного радіуса дільки лопаті, а також залежності потужності вітроустановки від кутової швидкості її ротора.

Ключові слова – функція, рівняння Ейлера, функціонал, варіаційна задача, екстремум, вітроустановка.

I. Вступ

Енергія повітряних мас є одним із найбільш перспективних видів альтернативних джерел енергії. На фоні постійного зростання цін на викопне паливо і інші енергоносії дослідження роботи, розробка нових конструкцій, вдосконалення методик розрахунку та математичних моделей роботи дешевих вітряків малої одиничної потужності, які працюють при слабких середньорічних вітрах, є досить актуальними.

У доповіді ми зупинимось на задачі оптимізації профільного кута лінійчастих лопатей та кутової швидкості тихохідного вітроколеса за критерієм максимального відбору потужності з потоків повітря, яка зводиться до математичної задачі пошуку екстремуму функціонала з невідомим параметром.

Функціоналами називаються змінні величини, значення яких визначаються вибором однієї або декількох функцій. Варіаційне числення вивчає методи, що дозволяють знаходити максимальні й мінімальні значення функціоналів. Задачі, у яких потрібно досліджувати функціонал на максимум або мінімум, називаються варіаційними задачами.

Багато законів механіки й фізики зводяться до твердження, що деякий функціонал у розглянутому процесі повинен досягати мінімуму або максимуму. У такому формулюванні ці закони називаються варіаційними принципами механіки або фізики. До таких варіаційних принципів або найпростіших наслідків з них належать: принцип найменшої дії, закон збереження енергії, закон збереження імпульсу, закон збереження кількості руху, закон збереження моменту кількості руху, різні варіаційні принципи класичної й релятивістської теорії поля, принцип Ферма в оптиці тощо.

Наведемо декілька прикладів використання функціоналів у задачах економіки та механіки. Якщо за $x(t)$ прийняти кількість покупок, які знають про деякий корисний продукт в момент часу t . Тоді функціонал $J_3 = \int_0^T \left(-\frac{kNx^2}{2} + \frac{kx^3}{3} + \frac{dx}{dt}x \right) dt$ (N –

кількість потенційно можливих покупок, яким буде відомо про продукт, k – коефіцієнт пропорційності) можна інтерпретувати як «енергетичну» характеристику або критерій оптимальності процесу поширення інформації.

Рівняння зігнутої осі балки на двох шарнірних опорах, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q , як відомо, має

$$EJW(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qLx^3}{12} - \frac{qL^3x}{24} \quad (EJ - \text{жорст-}$$

кість балки при згині (E – модуль пружності першого роду; J – осьовий момент інерції поперечного перерізу), L – відстань між шарнірними опорами, $W(x)$ – прогин балки). Тоді функціонал, який відображає накопичену енергію в деформованому стані, можна записати наступним чином

$$J_1 = \int_0^L \left[\frac{EJ(W'')^2}{2} + qW \right] dx.$$

Особливий науковий інтерес становить дослідження обертального руху тихохідного вітроколеса (ВК), кутова швидкість якого змінюється за допомогою повороту лопатей навколо своїх осей (рис. 1). В таких випадках необхідно розробляти оптимальні закони керування кутом профілю в залежності від швидкості набігаючих потоків повітря.

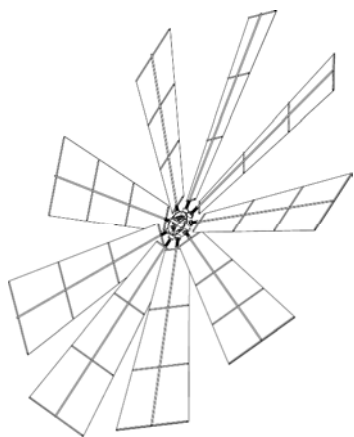


Рис. 1 Механізм регулювання частоти обертання вітроколеса шляхом повороту лопатей навколо своїх осей

II. Теоретичні аспекти дослідження

У випадку лінійчастої (профільованої) лопаті для визначення потужності, яку може відібрати вітро-

установка з потоку повітря, скористаємося формулою, виведеною в роботі [3]:

$$N = 2\pi\rho_n \int_{R_B}^{R_3} \left[r^2 \frac{d\varphi}{dt} \sin\alpha_r V_n \cos\alpha_r \times \left(V_n \cos\alpha_r - \frac{d\varphi}{dt} r \sin\alpha_r \right) \right] dr. \quad (1)$$

При відомих швидкості горизонтального потоку повітря V_n , його питомій масі ρ_n , вибраних розмірах ВК (внутрішньому та зовнішньому радіусі лопатей) – R_B , R_3 потужність, що відбирає ВК з потоку повітря, залежить від кутової швидкості вітрового колеса $\frac{d\varphi}{dt}$, яка входить у формулу (1) як невідомий параметр, та кута атаки лопаті α_r . Це дозволяє залежність (1) подати як функціонал з невідомим параметром вигляду

$$N = \int_{R_B}^{R_3} F \left(r, \alpha_r, \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right) dr, \quad (2)$$

де внутрішніми дужками виділено невідомий параметр $\frac{d\varphi}{dt}$.

Отже, одне із завдань даної роботи, яка стосується оптимізації кутової швидкості обертання тихохідного ВК та кута профілю його лопатей за критерієм максимально можливого відбору потужності з потоків повітря зводиться до математичної задачі пошуку екстремуму функціонала (2), що містить невідомий параметр $\frac{d\varphi}{dt}$. На підставі варіаційного числення [2] задача пошуку екстремуму функціонала розв'язується побудовою диференціального рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_r} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{d\alpha_r}{dr} \right)} \right) = 0 \quad (3)$$

і розв'язанням для нього задачі з крайовими умовами

$$\alpha_r|_{r=R_B} = \alpha_B \quad \text{та} \quad \alpha_r|_{r=R_3} = \alpha_3. \quad (4)$$

Аналіз структури підінтегрального виразу залежності (1) свідчить про те, що він не залежить від

$$\frac{d\alpha_r}{dr}. \quad \text{Тому} \quad \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{d\alpha_r}{dr} \right)} = 0, \quad \text{звідки} \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{d\alpha_r}{dr} \right)} \right) = 0.$$

Тоді рівняння Ейлера (3) набуває вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_r} = 0. \quad (5)$$

Знайдемо частинну похідну від підінтегральної функції залежності (1) по α_r , зведемо отриманий вираз до степеневій функції відносно тангенса і на підставі (5) прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_r} &= V_n^2 \frac{d\varphi}{dt} r^2 \cos^3 \alpha_r - 2V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^3 \cos^2 \alpha_r \sin \alpha_r - \\ &- 2V_n^2 \frac{d\varphi}{dt} r^2 \cos \alpha_r \sin^2 \alpha_r + V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^3 \sin^3 \alpha_r = \quad (6) \\ &= \operatorname{tg}^3 \alpha_r - \frac{2V_n}{\frac{d\varphi}{dt} r} \operatorname{tg}^2 \alpha_r - 2 \operatorname{tg} \alpha_r + \frac{V_n}{\frac{d\varphi}{dt} r} = 0. \end{aligned}$$

Розв'язання степеневого рівняння (6) дозволяє отримати залежність оптимального кута профілю α_r^{on} лінійчастої лопаті від її поточного радіуса:

$$\alpha_r = \alpha_r \left(r, (V_n), \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right), \quad (7)$$

в яку швидкість потоку повітря V_n та кутова швидкість обертання ВК $\frac{d\varphi}{dt}$ входять параметрами.

$$\text{За допомогою підстановки } \operatorname{tg} \alpha_r = y + \frac{2V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r}$$

рівняння (6) зводиться до неповного вигляду [4]:

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{2V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r} \right)^3 - \frac{2V_n}{\frac{d\varphi}{dt} r} \left(y + \frac{2V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r} \right)^2 - 2 \left(y + \frac{2V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r} \right) + \frac{V_n}{\frac{d\varphi}{dt} r} = \\ = y^3 + \left(-2 - \frac{4V_n^2}{3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2} \right) y + \left(-\frac{16V_n^3}{27 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 r^3} - \frac{V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r} \right) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

В нашому випадку

$$\begin{aligned} p = -2 - \frac{4V_n^2}{3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2}, \quad q = -\frac{16V_n^3}{27 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 r^3} - \frac{V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r}, \\ Q = \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 = \frac{1}{108} \left(-32 - \frac{32V_n^4}{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^4 r^4} - \frac{61V_n^2}{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Оскільки $Q < 0$ («незвідний» випадок), то рівняння (20) буде мати три різні дійсні корені, які можна знайти за наступними залежностями [4]:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\beta}{3}, \\ y_{2,3} &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\beta}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \\ \cos \beta &= -\frac{q}{2\sqrt{\left(-\frac{p}{3} \right)^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В нашому випадку рівняння (8) згідно з формулами (9) та (10) матиме наступні розв'язки:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{\frac{1}{3} \left(2 + \frac{4V_n^2}{3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2} \right)} \times \\ &\times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{16V_n^3 + 9V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2}{4\sqrt{\left(4V_n^2 + 6 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2 \right)^3}} \right) \right], \\ y_{2,3} &= -2\sqrt{\frac{1}{3} \left(2 + \frac{4V_n^2}{3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2} \right)} \times \\ &\times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{16V_n^3 + 9V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2}{4\sqrt{\left(4V_n^2 + 6 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2 \right)^3}} \right) \pm \frac{2\pi}{3} \right], \\ \beta &= \arccos \left(\frac{16V_n^3 + 9V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2}{4\sqrt{\left(4V_n^2 + 6 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2 \right)^3}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Отже, ми отримали наступні залежності кута профілю лопаті від поточного радіуса r , куди швидкість потоку повітря V_n та кутова швидкість обертання вітроколеса $\frac{d\varphi}{dt}$ входять параметрами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{r1} &= \arctg \left[2\sqrt{\frac{1}{3} \left(2 + \frac{4V_n^2}{3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2} \right)} \times \right. \\ &\times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{16V_n^3 + 9V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2}{4\sqrt{\left(4V_n^2 + 6 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2 \right)^3}} \right) \right] + \frac{2V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r} \left. \right], \\ \alpha_{r2,3} &= \arctg \left[-2\sqrt{\frac{1}{3} \left(2 + \frac{4V_n^2}{3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2} \right)} \times \right. \\ &\times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{16V_n^3 + 9V_n \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2}{4\sqrt{\left(4V_n^2 + 6 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r^2 \right)^3}} \right) \right] + \frac{2V_n}{3 \frac{d\varphi}{dt} r} \left. \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Аналізуємо отримані розв'язки, підставляючи конкретні значення швидкості вітру, кутової швидкості і поточного радіуса лопаті, та приймаємо для подальших розрахунків перший розв'язок α_{r1} . Для забезпечення сталої частоти обертання вітроколеса при зміні швидкості вітру необхідно змінювати профільний кут лопаті. Графік залежності профільного кута α_r від швидкості повітряного потоку V_n та поточного радіуса ділянки r при максимальній кутовій швидкості обертання тихохідного вітроколеса $\left(\frac{d\varphi}{dt} = 40 \frac{\text{об}}{\text{хв}}\right)$ подано на рисунку 2.

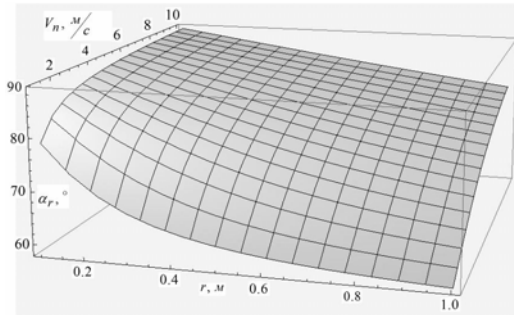


Рис. 2 Залежність кута профілю лопаті від швидкості повітряного потоку та поточного радіуса ділянки при сталій частоті обертання вітроколеса.

Вивівши аналітичні формули для знаходження оптимального кута профілю лопатей вітроколеса, підставимо їх у рівняння (1). Таким чином ми отримуємо залежність номінальної потужності вітроустановки з лінійчастими лопатями від кутової швидкості її ротора при заданих параметрах швидкості потоку повітря і розмірах ВК. Проінтегруємо її графічно у системі МАТНЕМАТІСА та знайдемо максимальне значення потужності вітроустановки (тобто екстремум функціонала (1)) та оптимальну кутову швидкість обертання її ротора при швидкості вітрового потоку $V_n = 8$ м/с (рис. 3).

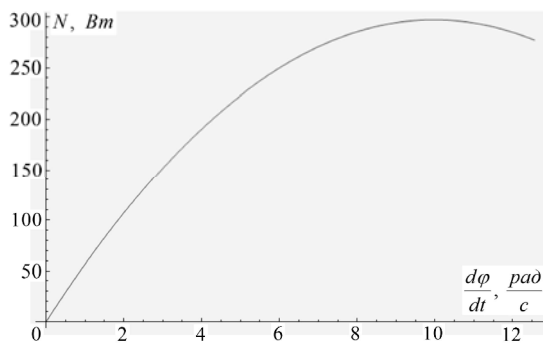


Рис. 3 Залежність потужності вітроустановки від кутової швидкості вітроколеса при фіксованих значеннях швидкості повітряного потоку та визначеному оптимальному куті профілю лопаті.

Із рисунку 3 випливає, що оптимальною кутовою швидкістю обертання вітроколеса є приблизно 10 рад/с або 95 об/хв, при якій вітроустановка зможе розвинути потужність близько 300 Вт. Проте, враховуючи той факт, що обране нами для досліджень вітроколесо є тихохідним із максимальною кутовою швидкістю $\frac{d\varphi}{dt} = 40 \frac{\text{об}}{\text{хв}} \approx 4,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, отримаємо номінальну потужність (тобто максимальне значення функціонала (1)):

$$N^{on} \approx 2 \cdot \pi \cdot 1,23 \int_{0,2}^1 \left[r^2 \cdot 4,2 \cdot \sin \alpha_r \cdot 8 \cdot \cos \alpha_r \times \right. \\ \left. \times (8 \cdot \cos \alpha_r - 4,2 \cdot r \cdot \sin \alpha_r) \right] dr \approx 230 \text{ Вт.} \quad (13)$$

Висновок

У доповіді наводиться задача розрахунку та оптимізації профільного кута лінійчастих лопатей тихохідного вітроколеса для забезпечення максимального відбору потужності з потоку повітря, яка зводиться до математичної задачі пошуку екстремуму функціонала, що містить невідомий параметр.

За допомогою програмного комплексу МАТНЕМАТІСА розроблено графічну залежність (рис. 3) номінальної потужності тихохідної вітроустановки з лінійчастими лопатями від кутової швидкості обертання вітроколеса, з якої знайдено оптимальне значення $\frac{d\varphi}{dt} = 40$ об/хв. Виведено графічні (рис. 2) та аналітичні (25) залежності кута профілю лінійчастої лопаті від поточного радіуса ділянки лопаті та швидкості повітряного потоку для забезпечення оптимальної кутової швидкості обертання вітроколеса. Отримано формулу (13) для визначення максимального значення функціонала (1) та розраховано номінальну потужність вітроустановки $N^{on} \approx 230$ Вт.

Література

- [1] І. Кузьо, В. Корендій. Обґрунтування розвитку вітроенергетичних установок малої та надмалої потужності // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2010. – № 679. – С. 61-68.
- [2] Л. Янг. Лекції по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М., 1974. – 488 с.
- [3] М. Кудлик, І. Лозовий. Оптимальні швидкість обертання тихохідного вітроколеса та профіль його лопатей за критерієм максимального відбору потужності зі слабких потоків повітря // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2001. – № 483. – С. 92-97.
- [4] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., 1968. – 720 с.
- [5] І. Кузьо, В. Корендій. Дослідження силових характеристик вітряків ВЕУ // Інженерна механіка та транспорт: Матеріали I Міжнародної конференції молодих вчених ЕМТ-2010. – Львів: Видавництво НУ«ЛП», 2010. – С. 18-19.