3-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1980. – 431 с. 6. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с. 7. Харченко Є. В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свит, 1991. – 176 с. 8. Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск: Вышейшая школа, 1973. – 560 с. 9. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: справочник. – 2-е изд., доп. – М. : Машиностроение, 1981. – 183 с. 10. Маденси Е., Гувен И. Конечно-элементный метод и приложения в инженерии с использованием ANSYS. – Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 686 с. 11. Сабонадьер Ж. К., Кулон Ж. Л. Методы конечных элементов и САПР. – М: Мир, 1989. – 990 с. 12. Шимкович Д. Г. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: 2008. – 72 с. 13. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC / Nastran for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с. 14. Гончаров П.С. NX для конструктора-машиностроителя + CD. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 504 с. 15. Харченко Є.В., Носов Ю.Є., Демків В.Й. Модальний аналіз щоглової металоконструкції підіймального пристрою з урахуванням положення каретки з вантажем // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні / Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – № 713. – Львів: Національний університет "Львівська політехніка", 2011. – С. 113–121.

УДК 517.95+534.1

П.Я. Пукач, І.В. Кузьо, З.М. Нитребич
Національний університет "Львівська політехніка"

МЕТОД ГАЛЬОРКІНА ТА ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ НЕОБМЕЖЕНОГО КАНАТА З УРАХУВАННЯМ ОПОРУ

Викладено методику якісного дослідження розв'язку в математичній моделі коливань напівнеобмежених пружних тіл. Розглянуте рівняння узагальнює нелінійне хвильове рівняння, що досліджується в теорії коливань. Отримано класи коректності узагальненого розв'язку.

The technique of qualitative solution research in mathematical model of vibrations of semi-infinite elastic bodies is exposed in the article. The equation generalizes the nonlinear wave equation, which is studied in the theory of oscillations. Correctness classes of a generalized solution are obtained.

Вступ. Актуальність проблеми та огляд основних результатів. Проблеми вивчення динамічних процесів у нелінійних коливальних системах, що описують поперечні (поздовжні) коливання під час переміщення вантажів за допомогою конвеєрів стрічкового (канатного) типу, є актуальними проблемами технічної механіки. Дослідження нелінійних коливальних і хвильових явищ у пружних стрижневих конструкціях за дії різного роду збурень (силових, інерційних і кінематичних) – одна із класичних проблем будівельної механіки. Треба зауважити, що проблема вивчення впливу параметрів системи (зокрема, швидкості руху каната) на коливання достатньо досліджена у випадку постійної швидкості руху та лінійного закону пружності матеріалу. Вказане зумовлене тим, що такі ситуації моделюються лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними [1]. Асимптотичні методи нелінійної механіки дали змогу дослідити також широкий клас механічних коливальних систем для випадку квазілінійної залежності амплітуди коливань від вінклерівської сили опору [2, 3]. За нелінійного закону пружності матеріалу, суттєво нелінійної залежності амплітуди коливань від сил опору та змінної швидкості руху каната (стрічки) задача пов'язана з принциповими математичними труднощами, оскільки відсутні загальні аналітичні методи розв'язування такого класу задач. Тому не існує загальних методик визначення амплітудно-частотних характеристик коливального процесу. З іншого боку, якісні методи загальної теорії нелінійних крайових задач дають змогу для широкого класу згаданих вище коливальних систем отримати результати коректності розв'язку задачі (йдеться про існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних). Вказана методика дає змогу обґрунтувати коректність розв'язку моделі та дає змогу надалі під час її дослідження застосовувати різноманітні наближені методи.

Ця стаття присвячена якісному вивченню математичної моделі нелінійних коливань напівнеобмеженого каната під дією нелінійних вінклерівських сил опору. Подібні задачі виникають в різноманітних технічних застосуваннях, наприклад, коливаннях трубопроводів на (нелінійному) еластичному ґрунті, залізничних колій, довгих мостів, туго натягнутих електричних ліній, оптичних волокон, вбудованих в нелінійно пружні тіла тощо [4–10]. За істотно нелінійної залежності амплітуди коливань від сил опору задача пов'язана з принциповими математичними труднощами навіть для випадку дослідження моделі коливань в обмеженій області. Ця проблема в загальному випадку розв'язана лише для дуже вузького класу задач. Необмеженість області створює додаткові принципові проблеми під час дослідження моделі. Зокрема, задачі для нелінійних хвильових рівнянь вигляду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b|u|^{r-2}u = f$, $r > 2$, a, b – деякі функції (сталі) в необмежених областях розглянуто у роботах [11–20]. Результати існування та єдиності розв'язку задач у необмежених областях у цих працях отримано за припущення певної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння на нескінченності або без таких припущень. Якісні результати щодо коректності розв'язків згаданих вище математичних моделей поки що вдалося отримати лише для доволі вузького класу задач в необмежених областях, оскільки в необмежених областях потрібно модифікувати методи загальної теорії нелінійних крайових задач. Отже, проблеми якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є актуальними.

Метою роботи є дослідження розв'язку задачі про нелінійні поперечні коливання пружного довгомірного тіла під дією сил опору в необмеженій області. В роботі для вказаних нелінійних коливальних систем отримано умови коректності розв'язку математичної моделі. Методика якісного вивчення коливань під дією нелінійних сил опору ґрунтується на загальних принципах теорії нелінійних крайових задач – методі монотонності та методі Гальоркіна. Наукова новизна полягає, зокрема, в узагальненні методики вивчення нелінійних задач на новий клас коливальних систем в необмеженій області, обґрунтуванні коректності розв'язку вказаної математичної моделі, яка має практичне застосування в реальних технічних коливальних системах. Запропонована методика дає змогу не лише обґрунтувати коректність розв'язку моделі, але також і можливість під час її дослідження застосовувати різноманітні наближені методи.

Постановка задачі. **Формулювання результату.** У статті наведено методику якісного дослідження математичної моделі нелінійних коливань пружного напівнеобмеженого каната за умови лінійного закону пружності та нелінійної вінклерівської сили. У найпростішій постановці модель описується змішаною задачею для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \qquad (3)$$

та крайовою умовою

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{4}$$

в області $Q=(0,+\infty)\times(0,T)$, $0<T<\infty$. Всюди в цій роботі використовуємо соболєвські простори функцій:

$$H_0^1(0,R)=\left\{u\in H^1(0,R): u\big|_{x=0}=u\big|_{x=R}=0\right\},\quad \|u\|^2_{H_0^1(0,R)}=\int_0^R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx,$$

$$H^1_{0,loc}(0,+\infty)=\left\{u\in H^1(0,R)\quad \text{для}\quad \text{довільного}\quad R>0,\ u(0,t)=0\right\},$$

$$L^r_{loc}(\overline{Q})=\left\{u\in L^r(Q_{R,T})\ \text{для}\quad \text{довільного}\quad R>0\right\},\quad r\in(1,+\infty).$$

Узагальненим розв'язком задачі називаємо функцію u, що задовольняє умови (2), (4), та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_t}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}v-fv\right]dxdt+ \\ +\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x,t)dx-\int_0^{+\infty}u_1(x)v(x,0)dx=0 \tag{5}$$

для довільного $t\in(0,T]$ та для довільної функції v з обмеженим носієм такої, що $v\in L^2((0,T);H^1_{0,loc}(0,+\infty)\cap L^p_{loc}((0,T)\times(0,+\infty))$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}\in L^2_{loc}((0,T)\times(0,+\infty))$.

Стосовно коефіцієнтів правої частини рівняння (1) та початкових даних припускатимемо виконання таких умов.

$$\text{(A, G)}\ \ a^2>0,\quad g>0,\quad p>2.$$

$$\text{(F)}\ \ f\in L^q_{loc}(0,T)\times(0,+\infty),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

$$\text{(U)}\ \ u_0\in H^1_{0,loc}(0,+\infty),\quad u_1\in L^2_{loc}(0,+\infty).$$

Основний результат цієї роботи: якщо математична модель коливальної системи описується задачею (2)–(4) для рівняння (1), то у разі виконання умов (A, G), (F), (U) існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)–(4) для якого

$$u\in C([0,T];H^1_{0,loc}(0,+\infty),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\in C([0,T];L^2_{loc}(0,+\infty)\cap L^p_{loc}((0,T)\times(0,+\infty)). \tag{6}$$

Методика отримання результату.

Нехай u^1,u^2 – узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) та задачі, що відрізняється від (1)–(4) лише тим, що у правій частині (1) вимушуюча сила f замінена на $\overline{f}\in L^q_{loc}(\overline{Q})$, відповідно. Тоді для довільних t,R,R_0 таких, що $0<R_0<R$, $t\in(0,T]$, можна отримати оцінку

$$\int_0^{R_0}\left(\frac{\partial u^1(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t}\right)^2dx+C_1\int_0^{R_0}\left(\frac{\partial u^1(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x}\right)^2dx+ \\ +C_2\int_0^{R_0}\int_0^t\left|\frac{\partial u^1}{\partial t}-\frac{\partial u^2}{\partial t}\right|^p dxdt\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^b\left(C_3R^{1-\frac{2p}{p-2}}+C_4\int_0^{R_0}\int_0^t\left|f-\overline{f}\right|^q dxdt\right), \tag{7}$$

де $b>\dfrac{2p}{p-2}$ – довільне число; C_1, C_2, C_3, C_4 – додатні сталі, що залежать лише від p, b. Обґрунтуємо нерівність (7). Нехай $R>R_0>0$, $t\in(0,T]$ – довільні числа. Визначимо функцію j

так: $\begin{cases} \dfrac{R^2-x^2}{R}, & x \le R, \\ 0, x > R \end{cases}$. Безпосередньо переконуємося в тому, що для функції j справджується оцінка $R-x \le j(x) \le 2(R-x)$. Нехай u^1, u^2 – узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) та задачі (1)–(4), у правій частині рівняння (1) якої функція f замінена на $\overline{f} \in L^q_{loc}(0,T)\times(0,+\infty)$. Приймемо далі $w = u^1 - u^2$ та здійснимо викладки і перетворення, аналогічні до [21]. Одержимо

$$\frac{1}{2}\int_0^R\left[\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] j^b dx + \int_0^R\int_0^t a^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial j^b}{\partial x} dxdt +$$
$$+g\int_0^R\int_0^t\left(\left|\frac{\partial u^1}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^1}{\partial t} - \left|\frac{\partial u^2}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u^1}{\partial t} - \frac{\partial u^2}{\partial t}\right) j^b dxdt = \int_0^R\int_0^t (f-\overline{f})\frac{\partial w}{\partial t} j^b dxdt. \qquad (8)$$

Оцінимо інтеграли рівності (8) при $\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}=1$:

$$\int_0^R\int_0^t a^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial j^b}{\partial x} dxdt \le M\int_0^R\int_0^t a^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{j^{\frac{b}{2}} j^{\frac{b}{p}}}{j^{\frac{b}{2}+\frac{b}{p}}}\frac{\partial j^b}{\partial x} dxdt \le$$

$$\le M\left(\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 j^b dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^p j^b dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^R\int_0^t\left|\frac{\frac{\partial j^b}{\partial x}}{j^{\frac{b}{2}+\frac{b}{p}}}\right|^{p_1} dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le C_5 d_1\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 j^b dxdt + d_2\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^p j^b dxdt + C_6\int_0^R\int_0^t\left|\frac{\frac{\partial j^b}{\partial x}}{j^{\frac{b}{2}+\frac{b}{p}}}\right|^{p_1} dxdt \le$$

$$\le C_5 d_1\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 j^b dxdt + d_2\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^p j^b dxdt + C_7\int_0^R\int_0^t j^{b-p_1} dxdt \le$$

$$\le C_5 d_1\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 j^b dxdt + d_2\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^p j^b dxdt + C_8 R^{b-\frac{2p}{p-2}+1},$$

де d_1, d_2 – довільні достатньо малі додатні сталі, C_5, C_6, C_7, C_8 – деякі додатні сталі, що залежать від p, b. Зауважимо, що в останній оцінці використано нерівність Юнга [22] та властивості функції j. Оцінимо інший інтеграл рівності (8):

$$\int_0^R\int_0^t (f-\overline{f})\frac{\partial w}{\partial t} j^b dxdt \le C_d\int_0^R\int_0^t\left|f-\overline{f}\right|^q j^b dxdt + d\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^p j^b dxdt,$$

де стала $C_d > 0$, а стала $d > 0$ може бути як завгодно малою.

Враховуючи наведені вище оцінки, отримаємо:

$$(R-R_0)^b\left(\int_0^{R_0}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2 j^b dx + C_9\int_0^{R_0}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2 j^b dx + C_{10}\int_0^R\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^p j^b dxdt\right) \le$$
$$\le C_{11}R^{b+1-\frac{2p}{p-2}} + C_{12}R^b\int_0^R\int_0^t\left|f-\overline{f}\right|^q j^b dxdt,$$

C_9 - C_{12} – додатні сталі. З останньої нерівності легко отримати нерівність (7).

Розглянемо далі послідовність областей $Q^k = (0,k)\times(0,T)$, $k=1,2,...$ та відповідно в кожній області Q^k задачу

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + g\left|\frac{\partial u^k}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^k}{\partial t} = f^k(x,t), \tag{9}$$

$$u^k(x,0) = u_0^k(x), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u^k(x,0)}{\partial t} = u_1^k(x), \tag{11}$$

$$u^k(0,t) = u^k(k,t) = 0. \tag{12}$$

Зазначимо, що у рівнянні (9) функції $f^k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), x \le k, \\ 0, x > k. \end{cases}$ Крім того, замість функції u_0 розглянуто u_0^k, де $u_0^k(x) = u_0(x)\cdot x_k(x)$, $x^k \in C^1(\mathrm{R})$, $x^k(x) = \begin{cases} 1, x \le k-1, \\ 0, x > k, \end{cases}$ $0 \le x^k(x) \le 1$. Зрозуміло, що функції $u_0^k \in H_0^1(0,k)$ і $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|u_0^k - u_0\right\|_{H_0^1(0,k)} = 0$. Замість початкової функції u_1 розглянуто функцію u_1^k – звуження функції u_1 на $(0,k)$, $u_1^k \in L^2(0,k)$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|u_1^k - u_1\right\|_{L^2(0,k)} = 0$.

Під узагальненим розв'язком задачі (9)–(12) розуміємо функцію u^k, яка задовольняє (9) (10), (12) та інтегральну тотожність, аналогічну до тотожності (5), що розглядається в області Q^k, причому функцію v вибирають так, що $v \in L^2((0,T);H_0^1(0,k)) \,\mathbf{I}\, L^p(Q^k)$, $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(Q^k)$. Зауважимо, що за умов теореми існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (9)-(12) в Q^k [21, с. 234]. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (9)–(12) для $k=1, k=2,...,$ довизначивши u^k нулем на $Q\setminus Q^k$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)-(4) в Q, яку для зручності знову позначимо $\left\{u^k\right\}$. Покажемо, що $\left\{u^k\right\}$ є фундаментальною у $C([0,T];H_{0,loc}^1(0,+\infty)$, а $\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\}$ – у просторі $C([0,T];L_{loc}^2(0,+\infty)) \,\mathbf{I}\, L_{loc}^p\left((0,T)\times(0,+\infty)\right)$ відповідно. Розглянемо різницю $u^l - u^m$, $l,m \in \mathrm{N}$, $m > l$ в області $(0,R)\times(0,t)$ $(l > R > R_0)$ та використаємо нерівність (7), врахувавши, що $f^l - f^m \equiv 0$ в $(0,R)\times(0,t)$. Аналогічно до (8) отримаємо

$$\int_0^{R_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(u^l(x,t) - u^m(x,t)\right)^2 + C_1\frac{\partial}{\partial x}\left(u^l(x,t) - u^m(x,t)\right)^2\right]dx + C_2\int_0^{R_0}\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(u^l - u^m\right)\right|^p \times$$

$$\times j^b\,dxdt \le \frac{1}{\left(R-R_0\right)^b}C_3R^{b+1-\frac{2p}{p-2}} + C_4\left\|u_0^l - u_0^m\right\|_{H_0^1(0,R_0)} + C_5\left\|u_1^l - u_1^m\right\|_{L^2(0,R_0)}. \tag{13}$$

З нерівності (13) за належного вибору достатньо великого $R > 0$

$$\int_0^{R_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(u^l(x,t) - u^m(x,t)\right)^2 + C_1\frac{\partial}{\partial x}\left(u^l(x,t) - u^m(x,t)\right)^2\right]dx +$$

$$+C_2\int_0^{R_0}\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(u^l - u^m\right)\right|^p j^b\,dxdt \le e$$

для довільного як завгодно малого $e > 0$. Отже, $\{u^k\}$ є фундаментальною послідовністю у просторі $C([0,T];H_{0,loc}^1(0,+\infty))$, тобто $u^k \to u$ сильно в $C([0,T];H_{0,loc}^1(0,+\infty))$, а послідовність $\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\}$ –

фундаментальна у просторі $C([0,T];L^2_{loc}(0,+\infty))\ \mathbf{I}\ L^p_{loc}((0,T)\times(0,+\infty))$, тобто $\dfrac{\partial u^k}{\partial t}\to\dfrac{\partial u}{\partial t}$ сильно в $C([0,T];L^2_{loc}(0,+\infty))\ \mathbf{I}\ L^p_{loc}((0,T)\times(0,+\infty))$. При цьому для функції u, очевидно, виконуються умови (2)–(4). Отже, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в сенсі інтегральної тотожності (5), для якого виконуються включення (6).

Єдиність отриманого розв'язку випливає з нерівності (13) при $R\to+\infty$, якщо розглянути два довільних розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4) і врахувати, що

$$u^1(x,0)=u^2(x,0), \qquad \frac{\partial u^1(x,0)}{\partial t}=\frac{\partial u^2(x,0)}{\partial t}.$$

Висновки. Вперше отримано умови коректності розв'язку в математичній моделі коливань напівнеобмеженого каната під впливом нелінійної сили опору – достатні умови існування та єдиності розв'язку в класі локально інтегровних функцій. Вказана методика дає змогу обґрунтувати коректність моделі також й у випадку коливань під дією комбінованих нелінійних впливів пружної основи та сил опору. Така математична модель зводиться до якісного аналізу змішаної задачі в обмеженій (для випадку обмеженого каната) чи необмеженій (як розглянуто у цій статті) області для рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\,|u|^{r-2}u+g\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=f$. Отримані якісні результати обґрунтовують можливість застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна та дають можливість надалі під час дослідження динамічних характеристик розв'язків розглянутих математичних моделей коливань застосовувати різноманітні наближені методи.

1. Коломиец В.Г. Случайные колебания упругих нелинейных систем с распределенными параметрами / В.Г. Коломиец, Л.М. Порхун // Математическая физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 103–108. 2. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – Киев: Вища школа, 1976. – 596 с. 3. Сокіл Б.І. Дослідження нелінійних коливань стрічок конвеєрів / Б.І. Сокіл // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Оптимізація виробничих процесів і технологічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні".– 2000.– № 394.– С. 101–104. 4. Santee D. M. Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads / D. M. Santee, P. B. Goncalves // Shock and Vibrations.– 2006.– 13.– P. 273–284. 5. Metrikine A. V. Steady state response of an infinite string on a non-linear visco-elastic foundation to moving point loads / A. V. Metrikine // Journ. Sound Vibr.– 2004.– 272.– P. 1033–1046. 6. Metrikine A.V. Stationary waves in a nonlinear elastic system interacting with a moving load / A.V. Metrikine // Acoustical Physics.– 1994.– 40.– P. 573–576. 7. Salenger G. Discreteness effects in the forced dynamics of a string on a periodic array of non-linear supports / G. Salenger, A.F. Vakakis // Int. Journ. Non–Lin. Mech.– 1998.– 33.– P. 659–673. 8. Ghayesh M. H. Parametric vibrations and stability of an axially accelerating string guided by a non-linear elastic foundation / M. H. Ghayesh // Int. Journ. Non–Lin.Mech.–2010.– 45.– P. 382–394. 9. Demeio L. Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate / L. Demeio, S. Lenci // Nonlinear Dynamics.– 2007.– 49.– P. 203–215. 10. Demeio L. Second–order solutions for the dynamics of a semi–infinite cable on a unilateral substrate / L. Demeio, S. Lenci // Journ. Sound Vibr.– 2008.– 315.– P. 414 –432. 11. D'Ancona P. A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type / P. D'Ancona, R. Manfrin // Ann. Mat. Pura Appl.– 1995.– 168.– P. 355–372. 12. Agre K. Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions / K. Agre, M. A. Rammaha // Diff. And Integr. Equat. − 2001.− 14.− P. 1315−1331. 13. Georgiev V. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and sourse terms / V. Georgiev, G. Todorova // Journ. Diff. Equat.– 1994.– 109.– P. 295–308. 14. Dragieva N. A. A hyperbolic equation with two space variables with strong *nonlinearity / N. A. Dragieva // Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat.– 1987. – 23, № 4. – P. 95–106. 15. Carpio A. Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations / A. Carpio // Journ. Math. Pures Appl. (9).– 1994.– 73, № 5.– P. 471–488. 16. Vittilaro E. Global nonexistence theorems for a class of evolution equation with dissipation / E. Vittilaro // Arch. Ration. Mech. Anal.– 149.– 1999, № 2.– P. 155–182. 17. Pecher H. Sharp existence results for self–similar solutions of semilinear wave equations / H. Pecher // Nonlin. Diff. Equat. And Appl.– 7.– 2000.– P. 323–341. 18. Лавренюк С. П. Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними / С. П. Лавренюк, М. О. Оліскевич // Укр. мат. журн.– 54.– 2002, № 10. – С. 1356–1370. 19. Lavrenyuk S. P. Mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation in a domain unbounded with respect to space variables / S. P. Lavrenyuk, P. Ya. Pukach // Ukrainian Math. Journ. – 59, № 11.– 2007.– P. 1708–1718. 20. Пукач П.Я. Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами / Пукач П. Я. // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 47.– 2004, № 4.– С.149–154. 21. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. [пер. с англ. под ред. О.А. Олейник].– Москва: Эдиториал УРСС, 2002.– 587 с. 22. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас [пер. с нем. В.Г. Задорожнего и А.И. Перова под ред. В.И. Соболева].– Москва: Мир, 1978.– 336 с.*

УДК 621.873.01

Ю.В. Човнюк[1], М.Г. Діктерук[2], К.І. Почка[2]
[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ
[2] Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ

ВПЛИВ ВЕРТИКАЛЬНИХ (ПАРАМЕТРИЧНИХ) КОЛИВАНЬ ВАНТАЖНОГО ВІЗКА МОСТОВОГО КРАНА НА ЙОГО ДИНАМІКУ ПРИ РОЗГОЙДУВАННЯХ ВАНТАЖУ У ПРОЦЕСАХ ПУСКУ/ГАЛЬМУВАННЯ

Розглянуто маятникові коливання вантажу на гнучкому підвісі (канаті) мостового крана у процесах його пуску/гальмування. Враховано вплив вертикальних (параметричних) коливань вантажного візка на динаміку системи “вантажний візок – канат – вантаж”.

The article deals with the pendular oscillations of the load on the flexible drop (rope) of the bridge crane during its start up/braking. The influence of the vertical (parametric) oscillations of the load wagon on the dynamics of the “loading wagon – rope - load” system is taken into consideration.

Постановка проблеми. Під час роботи кранів (зокрема мостових) спостерігаються маятникові коливання вантажу, котрі викликають нерівномірний рух кранів чи вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності під час їх експлуатації, що необхідно враховувати при уточнених розрахунках кранів.

У мостових кранах стандартних параметрів, які переміщуються вподовж рейкового шляху, виникають не тільки маятникові коливання вантажу, але й вертикальні (параметричні) коливання вантажного візка. Одна з фізичних причин останніх така.