

4. Рюшин В.Т. Исследование рабочего процесса и разработка методики расчета машин роликового формования бетонных смесей: дис. ... канд. техн. наук / В.Т. Рюшин. – К., 1986. – 212 с. 5. Ловейкін В.С. Динамічний аналіз роликової формовочної установки з рекупераційним приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: пр. I Міжнародної науково-технічної конференції (DSR AM - I), 4–7 жовтня 2004 р., Тернопіль (Україна). – С. 507–514. 6. Ловейкін В.С. Расчёты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин: учеб. пособие / В.С. Ловейкин. – Киев: УМК ВО, 1990. – 168 с. 7. Патент України на винахід № 67091 А. Установка для формування виробів з бетонних сумішей / Ловейкін В.С., Гарнець В.М., Почка К.І. – № и2003076371 заявл. 08.07.2003; опубл. 15.06.2004, Бюл. № 6. 8. Почка К.І. Розробка та аналіз роликової формувальної установки з рекупераційним приводом: автореф. дис. ... канд. техн. наук / К.І. Почка. – К.: КНУБА. – 2008. – 24 с. 9. Ловейкін В.С. Силовий аналіз роликової формовочної установки з рекупераційним приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Техніка будівництва: наук.-техн. журнал. – № 14. – 2003. – С. 27–37. 10. Ловейкін В.С. Аналіз нерівномірності руху роликової формовочної установки з рекупераційним приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Підйомно-транспортна техніка: наук.-техн. та виробн. журнал. – Вип. 4. – 2005. – С. 19–33. 11. Ловейкін В.С. Оптимізація конструктивних параметрів приводного механізму роликової формовочної установки з рекупераційним приводом / В.С. Ловейкін, Д.А. Паламарчук, К.І. Почка // Техніка будівництва: наук.-техн. журнал – № 15. – 2004. – С. 40–48. 12. Патент України на винахід № 70523 А. Установка для формування виробів з бетонних сумішей / Ловейкін В.С., Гарнець В.М., Почка К.І. – № и20031110814 заявл. 28.11.2003; опубл. 15.10.2004, Бюл. № 10.

УДК 621.873.01

В.С. Ловейкін<sup>1</sup>, Ю.В. Човнюк<sup>1</sup>, М.Г. Діктерук<sup>2</sup>, К.І. Почка<sup>2</sup><sup>1</sup> Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ<sup>2</sup> Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ

## ВДОСКОНАЛЕННЯ ІСНУЮЧИХ АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ КРАНІВ ПРИ ЇХ ПУСКУ/ГАЛЬМУВАННІ

© Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Почка К.І., 2013

*Складено динамічні моделі, які адекватно описують і уточнюють розрахункові схеми аналізу навантажень, що виникають у вантажопідйомних машинах/кранах при їх пуску/гальмуванні, визначено області прикладання і величини (процеси) зовнішніх впливів (силових чи кінематичних). Вибрано числово-аналітичний метод розв'язання відповідних диференціальних рівнянь моделей, оснований на аналізі фазових портретів руху системи (класичних та вищих порядків).*

*The fields of applications and values (processes) of external impacts (power and kinematic) are defined while developing dynamic models which adequately describe and specify calculation schemes of the analysis of loads arising in load lifting machines/cranes at their start up/braking. The numerical and analytical method of solving proper differential model equations is based on the analysis of the phase likeness of the systems movement (of both the classical and highest orders) is proposed.*

**Постановка проблеми.** Відомо, що у дискретних диференціальних моделях вантажопідйомних машин та механізмів, які описують рух останніх, зовнішні впливи і параметри моделі розраховуються як невідповідні величини і функції, а маси є зосередженими.

Під час складання динамічних моделей формують розрахункову схему, визначають області застосування і величини (процеси) зовнішніх впливів (силових або кінематичних), складають рівняння руху, вибирають метод їх розв'язку і здебільшого готують низку технічних засобів для розв'язку (ЕОМ, керовані комплекси). Проте багато питань залишаються за такого підходу нез'ясованими: стійкість розв'язків, їх однозначність, періодичність у часі, можливість виникнення динамічного хаосу (особливо для нелінійних диференціальних рівнянь). Саме для цих випадків необхідне, на думку авторів цього дослідження, розумне сполучення числових та аналітичних підходів до розв'язку задачі.

**Аналіз публікацій з теми дослідження.** Детерміновані динамічні моделі вантажопідійомних машин розглянуто у роботах [1–3]. Розрахункові схеми дискретних моделей із зосередженими масами подано у [1, 4–12]. Рівняння руху складаються методами аналітичної механіки [13, 14]. Лінеаризовану модель розрахунку динамічних навантажень кранів при їх пуску/гальмуванні досліджено у [15]. Результати цитованих вище робіт будуть використані у цій роботі, як і методи, розвинуті у [16].

**Мета роботи** полягає у вдосконаленні аналітичних методів розрахунку динамічних навантажень кранів при їх пуску/гальмуванні за наявності розгойдування вантажу. При цьому обґрунтований метод фазових портретів (вищого порядку), який дозволяє з'ясувати особливості руху вказаних машин та визначити зони появи недетермінованих режимів руху (а значить, некерованих), таких як детермінований хаос, властивих, зокрема, нелінійним механічним системам, що функціонують у перехідних режимах (нестационарні коливання).

**Виклад основного матеріалу дослідження.**

### 1. Лінеаризована модель розгойдування вантажу під час пуску/гальмування кранів М.О. Лобова [15].

Під час роботи кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу, котрі викликають нерівномірний рух кранів або вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності при їх експлуатації, що необхідно враховувати в уточнених розрахунках кранів.

У мостових, козлових і деяких інших кранах стандартних параметрів, котрі переміщуються впоперек рейкового шляху, частота маятникових коливань вантажу відносно крана суттєво нижча від частоти пружних коливань кранової металокопункції і трансмісії механізму переміщення. Навіть за малої довжини виска канатів (не більше за 3 м) частота маятникових коливань вантажу не перевищує  $2 \dots 2,6 \text{ рад/с}$ , тоді як частота пружних коливань кранів у кілька разів, а то й у десятки разів вища.

Отже, маятникові коливання вантажу можна вважати практично незалежними від пружних коливань крана і при їх розрахунку металокопункцію і трансмісію механізму пересування можна приймати абсолютно жорсткими. Визначаючи динамічні навантаження, що діють на металокопункцію і трансмісію механізму пересування, закон зміни горизонтальної складової натягу канатів, що виникає у результаті маятникових коливань вантажу, можна задати у вигляді відомої функції часу, визначеної за схемою абсолютно жорсткого крана. Зазвичай цей прийом дозволяє знизити порядок рівнянь руху кранової динамічної системи на дві одиниці [17].

Згідно із викладеним вище розрахунок маятникових коливань вантажу на канатах М.О. Лобов [15] пропонує вести за найпростішою схемою двомасової системи. При цьому  $m_1$  – маса крана/вантажного візка, приведена до поступального переміщення крана чи візка;  $m_2$  – маса вантажу;  $G = m_2 \cdot g$  – вага вантажу ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння). На привідні колеса крана чи візка впливає сумарне тягове чи гальмівне зусилля ( $P$ ), а також  $W$  – сила опору пересуванню крана чи візка. Автор [15] вводить  $x_1$  та  $x_2$  – узагальнені координати горизонтального

переміщення мас  $m_1$  та  $m_2$ ,  $S$  – сумарне зусилля натягу канатів,  $j$  – кут відхилення канатів від вертикалі,  $T$  – горизонтальну складову зусилля у канатах. При цьому  $H$  – довжина виска канатів.

Вважаючи, що максимальне відхилення канатів від вертикалі не перевищує  $10\dots 12^\circ$ , приймають  $\sin j \approx j$ ,  $\cos j \approx 1,0$ . Із врахуванням цього припущення  $x_2 = x_1 + H \cdot j$ ,

$$S = G = m_2 \cdot g, \text{ а горизонтальна складова натягу канатів } T = \frac{S \cdot j = m_2 \cdot g \cdot (x_2 - x_1)}{H}.$$

У результаті всіх наведених припущень у [15] отримано математичну модель руху крана та вантажу (у горизонтальному напрямку):

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x} + c \cdot (x_1 - x_2) = P - W; \\ m_2 \cdot \ddot{x} + c \cdot (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + w^2 \cdot x = \frac{(P - W)}{m_1}, \quad (1)$$

де  $x = x_1 - x_2$ ,  $x$  – горизонтальне переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу,

$$w = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot H}} \text{ – частота власних маятникових коливань вантажу відносно крана у період розгону.}$$

Розв'язуючи рівняння (1) відносно  $x$  за нульових початкових умов, знаходимо, що [15]:

$$x = A \cdot (1 - \cos w \cdot t) = 2 \cdot A \cdot \sin^2\left(\frac{w \cdot t}{2}\right), \quad A = \frac{(P - W) \cdot H}{(m_1 + m_2) \cdot g}, \quad (2)$$

тобто максимальне значення  $x$  досягає:

$$x_{\max} = 2 \cdot A, \quad t = \frac{P}{w}. \quad (3)$$

Зазначимо, що цей результат автор [15] отримав за таких припущень:

а) період маятникових коливань вантажу ( $T = \frac{2p}{w}$ ) більший або одного порядку з часом (тривалістю) розгону крана ( $t_{\text{роз.}}$ ), тобто  $t_{\text{роз.}} \sim T$ . Тому під час розв'язання системи (1) можна прийняти, що рушійна сила привідного двигуна механізму пересування постійна і дорівнює середньопусковому значенню;

б) горизонтальна складова натягу канатів, що діє на кран, має вигляд:

$$T = \frac{-m_2 \cdot g \cdot x}{H} = -T_a \cdot (1 - \cos w \cdot t) = -2 \cdot T_a \cdot \sin^2\left(\frac{w \cdot t}{2}\right), \quad (4)$$

де  $T_a = A \cdot c$ . Тобто зусилля  $T$  змінюється від  $T_{\min} = 0$  до  $T_{\max} = -2 \cdot T_a$  й ніколи не стає додатним, що означає: у розглядуваному випадку розгону крана воно спрямоване у той самий бік, що й сила опору  $W$ ;

в) сила сумарного натягу канатів  $S$  не залежить від часу  $t$  й знаходиться зі співвідношення:  $S \approx m_2 \cdot g$ .

Автор [15] вважає, що у розрахунках динамічних навантажень у силових елементах кранів під дією постійного рушійного зусилля вплив вантажу, який розгойдується на канатах, можна враховувати за допомогою залежності (4), і за аналогією знаходити вираз для горизонтального зусилля  $T$  за інших законів зміни рушійних зусиль привідних двигунів механізму пересування кранів.

На нашу думку, ці висновки вимагають уточнень, оскільки зроблені лише на основі розгляду лінеаризованої динамічної моделі ( $j \ll 1$ ).

Для точної моделі характерною буде залежність  $T(j)$  та  $S(j)$  (рис. 1):

$$T(j) = m_2 \cdot g \cdot \operatorname{tg} j,$$

$$S(j) = \sqrt{T^2 + (m_2 \cdot g)^2} = m_2 \cdot g \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 j} = m_2 \cdot g \cdot \frac{1}{\cos j}, \quad (5)$$

які справедливі для будь-яких значень  $j$ . (Самі канати не зазнають деформації розтягу).

Крім того, рівняння уточненої моделі повинні бути нелінійними по  $j$ , а поперечна жорсткість  $c$  не постійною величиною, як у [15] ( $c = \frac{m_2 \cdot g}{H}$ ), а змінною у часі  $t$ :

$$c = \frac{m_2 \cdot g}{\cos j \cdot H}, \quad j = j(t). \quad (6)$$

Наявність  $c(t)$  може призводити до параметричних коливань у розглядуваній моделі механічної системи. Крім того, зусилля  $P(t)$  не є постійною величиною, особливо в разі розгляду моменту пуску крана/візка, його зрушення з місця.

Наявні неточності у моделі М.О. Лобова [15] можна усунути, застосувавши підхід роботи [13].

**2. Уточнена нелінійна динамічна модель (Л.Д. Ландау) для розрахунку навантажень у кранових системах при їх пуску/гальмуванні.**

Згідно з підходами роботи [13], рівняння руху розглядуваної системи у термінах координат  $x_1$  та  $j$  мають вигляд:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}_1 + m_2 \cdot H \cdot (\ddot{j} \cdot \cos j - \dot{j}^2 \cdot \sin j) = F(t) - W \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}_1); \\ \ddot{j} + \frac{g}{H} \cdot \sin j + \frac{\ddot{x}_1}{H} \cdot \cos j = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Розглядаючи етап розгону  $\dot{x}_1 > 0$ , з (7) можна одержати одне рівняння для  $j$ :

$$\ddot{j} + \frac{g}{H} \cdot \sin j + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot (\dot{j}^2 \cdot \sin j - \ddot{x}_1 \cos j) \cdot \cos j + \frac{[F(t) - W]}{(m_1 + m_2) \cdot H} \cdot \cos j = 0. \quad (8)$$

Знаючи  $j(t)$ , можна знайти  $x_1(t)$  з такого рівняння:

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{F(t) - W + m_2 \cdot H \cdot (\dot{j}^2 \cdot \sin j - \ddot{x}_1 \cos j)}{(m_1 + m_2)}. \quad (9)$$

Для випадку  $j \ll 1$  замість (8) та (9) маємо:

$$\ddot{j} + \frac{g}{H} \cdot j + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot (\dot{j}^2 \cdot j - \ddot{x}_1) + \frac{[F(t) - W]}{(m_1 + m_2) \cdot H} = 0, \quad (10)$$

або

$$\ddot{j} + \left\{ \Omega^2 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \dot{j}^2 \right\} \cdot j = \frac{-[F(t) - W]}{m_1 \cdot H}, \quad \Omega \equiv \omega. \quad (11)$$

Для  $x_1(t)$ , якщо  $j \ll 1$ , маємо рівняння:

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{F(t) - W + m_2 \cdot H \cdot (\dot{j}^2 \cdot j - \ddot{x}_1)}{(m_1 + m_2)}. \quad (12)$$

Після закінчення процесу розгону крана/візка він рухається рівномірно (по крановій балці), тому  $\dot{x}_1 = \operatorname{const} = V_0$ ,  $\ddot{x}_1 \equiv 0$ . У цьому випадку  $F(t) \equiv F_0$ ,  $W = m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g$ , де  $m$  – коефіцієнт тертя візка/крана з опорою. Рівняння (7)–(12) спрощуються.

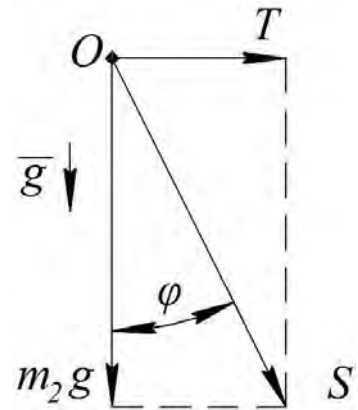


Рис. 1. Уточнена розрахункова схема (силовий трикутник): O – центр маси крана/візка

Так, замість (7) маємо:

$$\begin{cases} j\ddot{x} \cos j - j\dot{x}^2 \cdot \sin j = \frac{F_0 - m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{m_2 \cdot H}; \\ j\ddot{x} + \frac{g}{H} \cdot \sin j = 0; & \dot{x} = V_0, \end{cases} \quad (13)$$

або для  $j$  :

$$\frac{g}{H} \cdot \sin j \cdot \cos j + j\dot{x}^2 \cdot \sin j = \frac{-F_0 + m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{m_2 \cdot H}. \quad (14)$$

Для випадку  $j \ll 1$  (14) набуває вигляду:

$$j \cdot \left( \frac{g}{H} + j\dot{x}^2 \right) = \frac{-F_0 + m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{m_2 \cdot H}. \quad (15)$$

З рівнянь (8), (11), (14) та (15) видно, що при уточненій (нелінійній) постановці задачі виникає додатковий член  $\sim j\dot{x}^2$  у рівняннях, котрі описують рух кранової системи. Завдяки цьому розгойдування вантажу на канаті проходять зі змінною частотою, відмінною як від частоти  $W$ , так і від частоти власних коливань маятника (математичного)  $W^* = \sqrt{g/H}$ .

Зрозуміло, що аналіз рівнянь (7)–(15) треба виконувати лише числово.

### 3. Аналітичний метод розрахунку навантажень у кранах/вантажопідійомних машинах В.І. Брауде–М.С. Тер-Мхітарова [3].

Процес навантаження навіть у найпростішій двомасовій розрахунковій схемі має доволі складний характер. Це пояснюється тим, що під час кожного пуску/гальмування системи виникають вимушені пружні коливання мас зі “своїми” початковими умовами. Якщо у розглядуваній задачі для врахування процесу розсіювання енергії коливань застосовується теорія в’язкого тертя, тоді деформація пружного ланцюга (канату)  $q = q_1 - q_2$  (де  $q_1$  – переміщення ведучої маси  $m_1$ , а  $q_2$  – переміщення веденої маси  $m_2$ ) пов’язана з навантаженням  $S_y$  у ланцюгу формулою:

$$S_y = q \cdot \tilde{c}, \quad (16)$$

де  $\tilde{c}$  – коефіцієнт жорсткості, визначається у результаті розв’язання диференціального рівняння:

$$\ddot{q} + 2 \cdot n \cdot \dot{q} + n_r^2 \cdot q = \frac{1}{m_1 \cdot m_2} \cdot \tilde{A}(t), \quad (17)$$

де  $n$  – параметр, що характеризує затухання коливань,  $n = \frac{a \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1 \cdot m_2}$ ,  $a$  – коефіцієнт непружного опору;  $n_r$  – кругова частота вільних коливань відповідної консервативної системи,  $n_r = \sqrt{\frac{\tilde{c} \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$ ;  $\tilde{A}(t)$  – зовнішній вплив,  $\tilde{A}(t) = m_2 \cdot S_o(t) + m_1 \cdot S_{on}(t)$  ( $S_o(t)$  – зусилля двигуна чи гальм,  $S_{on}(t)$  – опір рухові системи,  $t$  – час). (Зауважимо, що у (16) та (17)  $\tilde{c} \equiv c$ ).

Детермінований розв’язок рівняння (17) складається із загального розв’язку відповідного однорідного рівняння (перша складова) та частинного розв’язку неоднорідного (друга складова):

$$\begin{aligned} q = \exp(-n \cdot t) \cdot \left[ q_0 \cdot \left( \cos(n_0 \cdot t) + \frac{n}{n_0} \cdot \sin(n_0 \cdot t) \right) + \frac{\dot{q}_0}{n_0} \cdot \sin(n_0 \cdot t) \right] + \\ + \frac{1}{n_0 \cdot m_1 \cdot m_2} \cdot \int_0^t \tilde{A}(t) \cdot \exp[-n \cdot (t-t)] \cdot \sin[n_0 \cdot (t-t)] dt. \end{aligned} \quad (18)$$

У цій формулі  $q_0$  та  $\phi_0$  – початкові значення пружної деформації та її швидкості, а  $n_0 = \sqrt{n_r^2 - n^2}$ . Надалі знайдемо розв’язки (17) при  $S_{on}(t) = 0$ , а  $S_o(t) = F(t) - W = P(t) - m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g$ ,  $P(t) \equiv F(t)$ .

Розглянемо далі процес пуску кранової системи за нульових початкових умов:

$$t = 0: \quad q_0 = 0, \quad \dot{\phi}_0 = 0. \tag{19}$$

Для  $\tilde{A}(t)$  вибираємо такий вигляд:

$$\tilde{A}(t) = m_2 \cdot \{F_0 \cdot \cos[q(t)] - m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g\}, \quad F_0 > m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g, \tag{20}$$

де  $F_0$  – амплітуда вимушеної сили, а її частота  $n = \frac{dq}{dt}$  є деякою функцією часу  $t$ ; у найпростішому випадку це лінійна функція:

$$n(t) = e \cdot t, \quad e > 0, \tag{21}$$

де  $e$  – швидкість зміни частоти  $n(t)$ . Надалі вважаємо, що  $n(t)$  може змінюватись як заведено швидко порівняно з “природною одиницею часу” (період власних коливань  $T^* = \frac{2p}{n_r}$ )

розглядуваної лінійної системи. У випадку нелінійної системи частоту  $n(t)$  вважатимемо повільнозмінною величиною у вказаному вище сенсі.

Проінтегруємо рівняння (17). Попередньо замість  $q$  введемо комплексну змінну  $y$  таку, що:

$$q = \text{Re} y, \tag{22}$$

і задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \cdot n \cdot \frac{dy}{dt} + n_r^2 \cdot y = \frac{1}{m_1} \cdot \{F_0 \cdot e^{-iq(t)} - m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g\}, \quad i^2 = -1. \tag{23}$$

За допомогою методу варіації довільних сталих за нульових початкових умов (19) з (23) маємо:

$$y(t) = \frac{1}{n_0 \cdot m_1} \cdot \int_0^t F_0 \cdot e^{-iq(t)-n(t-t)} \cdot \sin[n_0 \cdot (t-t)] dt + y_0, \tag{24}$$

де  $y_0 = -\frac{m \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot n_r^2}$ ,  $q(t) = \frac{e \cdot t^2}{2} + d$  ( $d$  – початкова фаза).

Інтеграл у (24) не можна подати через найпростіші (елементарні) функції у замкненій формі, а його числове визначення пов’язане з певними складностями, оскільки підінтегральна функція є швидкоплинною та осцилюючою. Нижче наведений розв’язок задачі [16], який виражається через інтеграл ймовірностей від комплексного аргументу  $W(z)$ , для якого існують досить детальні таблиці [18]:

$$W(z) = \exp(-z^2) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot i}{\sqrt{p}} \cdot \int_0^z e^{z^2} dz \right). \tag{25}$$

Застосування табульованої функції  $W(z)$  для обчислення інтеграла (24) істотно знижує трудомісткість обчислень порівняно з числовим інтегруванням чи за допомогою збіжних або асимптотичних рядів.

Підставляючи у (24) синус за допомогою показникових функцій за відомими тотожностями Ейлера та виносячи за знак інтеграла множники, які не залежать від  $t$ , матимемо:

$$y(t) = y_0 + \frac{1 \cdot F_0}{2 \cdot i \cdot n_0 \cdot m_1} \cdot \left\{ \int_0^t \exp\left[-i \cdot \frac{e \cdot t^2}{2} - (i \cdot n_0 - n) \cdot t\right] dt \cdot \exp[(i \cdot n_0 - n) \cdot t - i \cdot d] - \int_0^t \exp\left[-i \cdot \frac{e \cdot t^2}{2} + (i \cdot n_0 + n) \cdot t\right] dt \cdot \exp[-(i \cdot n_0 + n) \cdot t - i \cdot d] \right\}. \tag{26}$$

Введемо замість  $t$  нові змінні, а саме у першому та у другому інтегралі прийmemo відповідно:

$$v = \frac{(i-1)}{2 \cdot \sqrt{e}} \cdot (e \cdot t + n_0 + i \cdot n), \quad u = \frac{(1-i)}{2 \cdot \sqrt{e}} \cdot (e \cdot t - n_0 + i \cdot n). \quad (27)$$

Підставляючи (27) у (26), матимемо:

$$y(t) = y_0 + \frac{(i-1) \cdot F_0}{2 \cdot n_0 \cdot \sqrt{e} \cdot m_1} \cdot \left[ e^{-v^2} \cdot \int_{v_0}^v e^{v^2} dv + e^{-u^2} \cdot \int_{u_0}^u e^{u^2} du \right] \cdot e^{-iq(t)}, \quad (28)$$

де  $u_0$  та  $v_0$  – значення  $u$  та  $v$  при  $t = 0$ :

$$u_0 = \frac{(1-i)}{2 \cdot \sqrt{e}} \cdot (i \cdot n - n_0), \quad v_0 = \frac{(i-1)}{2 \cdot \sqrt{e}} \cdot (i \cdot n + n_0). \quad (29)$$

Вводячи позначення:

$$\bar{A}(t) = \frac{(i-1) \cdot F_0}{2 \cdot n_0 \cdot \sqrt{e} \cdot m_1} \cdot \left[ e^{-v^2} \cdot \int_{v_0}^v e^{v^2} dv + e^{-u^2} \cdot \int_{u_0}^u e^{u^2} du \right], \quad (30)$$

подамо (28) у вигляді:

$$y(t) = y_0 + \bar{A}(t) \cdot e^{-iq(t)}, \quad (31)$$

або після виділення дійсної частини відповідно до (22) розв'язок диференціального рівняння (24) набуває вигляду:

$$q(t) = y_0 + |\bar{A}(t)| \cdot \cos[q(t) + d_1(t)], \quad |\bar{A}(t)| = \sqrt{(\operatorname{Re} \bar{A}(t))^2 + (\operatorname{Im} \bar{A}(t))^2}. \quad (32)$$

Тут у (32):

$$d_1(t) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} \bar{A}(t)}{\operatorname{Re} \bar{A}(t)} \right\}, \quad (33)$$

де  $\operatorname{Re} \bar{A}(t)$  та  $\operatorname{Im} \bar{A}(t)$  – дійсна та уявна частини  $\bar{A}(t)$ .

Використовуючи (25), формулу (30) для  $\bar{A}(t)$  можна подати так:

$$\bar{A}(t) = \frac{(1+i) \cdot F_0}{4 \cdot n_0 \cdot m_1} \cdot \sqrt{\frac{p}{e}} \cdot \left[ W(u) + W(v) - W(u_0) \cdot e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) \cdot e^{v_0^2 - v^2} \right]. \quad (34)$$

Останні два члени у квадратних дужках виразу (34), помножені на  $\exp[-i \cdot q(t)]$ , являють собою затухаючі вільні коливання пружної системи, викликані у початковий момент прикладанням зовнішнього навантаження.

Доцільно, як і у [16], ввести такі позначення:

$$I^0 = \frac{n_0}{2 \cdot n}; \quad h = \frac{n}{\sqrt{e}}, \quad (35)$$

де  $I^0$  – динамічний коефіцієнт за усталеного резонансу кранової системи,  $h$  – безрозмірний параметр. Тоді, відповідно до (34), вираз для амплітуди нестационарних коливань системи при її проходженні через резонанс буде мати вид ( $0 \leq t < \infty$ ):

$$|\bar{A}(t)| = \frac{\bar{P}}{n_0^2} \cdot h \cdot I^0 \cdot \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \left| W(u) + W(v) - W(u_0) \cdot e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) \cdot e^{v_0^2 - v^2} \right|, \quad (36)$$

де  $\bar{P} = \frac{F_0}{m_1}$ , що є по суті статичним відхиленням системи ( $n_0 \approx n_r$ ).

Якщо ввести ще один безрозмірний параметр

$$b = \frac{|\bar{A}(t)| \cdot n_0^2}{P}, \tag{37}$$

котрий за визначенням називатимемо відносним динамічним коефіцієнтом при нестационарних коливаннях кранової системи, тоді з (36) та (37) матимемо ( $0 \leq t < \infty$ ):

$$b = h \cdot \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot |W(u) + W(v) - W(u_0) \cdot e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) \cdot e^{v_0^2 - v^2}|. \tag{38}$$

Цей вираз дозволяє побудувати [16] досить прості графіки для визначення максимальних амплітуд коливань при проходженні кранової системи через резонанс за заданих безрозмірних параметрів  $I^0$  та  $h$ .

Після закінчення терміну пуску кранової системи ( $t_n$ ), яка до цього перебувала у стані спокою, матимемо:

$$t = t_n, \quad q(t_n) = y_0 + |\bar{A}(t_n)| \cdot \cos[q(t_n) + d_1(t_n)]. \tag{39}$$

$$\dot{q}(t_n) = \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{(\operatorname{Re} \bar{A}(t))^2 + (\operatorname{Im} \bar{A}(t))^2} \cdot \cos[q(t) + d_1(t)] \right\} \Big|_{t=t_n}. \tag{40}$$

Саме такими будуть значення  $q$  та  $\dot{q}$  на початку стаціонарного руху візка з постійною швидкістю  $V_0$  вдовж кранової балки. (По суті,  $q(t_n)$  та  $\dot{q}(t_n)$  є початковими умовами для такого руху вантажного візка (у межах моделі [3]) з постійною швидкістю  $V_0$  після закінчення перехідних процесів пуску ( $t \geq t_n$ )).

#### 4. Числові розрахунки динамічних навантажень у межах моделі Л.Д. Ландау.

Використання підходу Л.Д. Ландау [13], що дає уточнену розрахункову схему для аналізу динамічних навантажень (порівняно з моделлю Н.А. Лобова [15]), дозволило визначити основні закономірності руху вантажного візка крана ( $m_1$ ) та вантажу на канаті ( $m_2$ ) для таких значень числових параметрів:  $m = k = 0,1$  (коефіцієнт тертя ковзання);  $m_1 = 10^4 \text{ кг}$ ;  $m_2 = (10^4; 10^5; 2 \cdot 10^5) \text{ кг}$ ;  $H = (10; 15; 20) \text{ м}$ ;  $F = \text{const} > W$  ( $F = 2 \cdot W$ ) для будь-яких значень кута відхилення канату  $j$  від вертикалі. Зазначимо, що навіть для  $j \ll 1$  (модель Н.А. Лобова [15]) у диференціальному рівнянні для кута ( $j$ ) виникає суттєво нелінійний член  $\sim \frac{m_2}{m_1} \cdot j \ddot{j} \cdot j$ , вплив котрого посилюється зі зростанням

відношення  $\frac{m_2}{m_1}$  та ненульових початкових умов задачі ( $j|_{t=0} \neq 0$ ). Зокрема, після миттєвих зупинок і наступних зрушень з місця вантажного візка мостового крана початкові умови ( $j|_{t=0} \neq 0, \dot{j}|_{t=0} \neq 0$ ), як правило, ненульові, що може призводити до значних амплітуд маятникових коливань вантажу, розгойдувань його на канаті у процесах пуску/гальмування. Ця теза чітко підтверджується числовими розрахунками на ПЕОМ і зафіксована своєрідною “трансформацією” контуру фазового портрета системи (як класичного – у площині  $(j, \dot{j})$ , так і портретів вищого порядку – у площинах  $(j, \ddot{j}), (\dot{j}, \ddot{j})$ ). Замкненість кривої фазового портрета системи того чи іншого порядку означає наявність у динамічній системі періодичних нелінійних коливань (так званих фінітних рухів системи).

На рис. 2–5 наведено фазові портрети системи при різних параметрах.



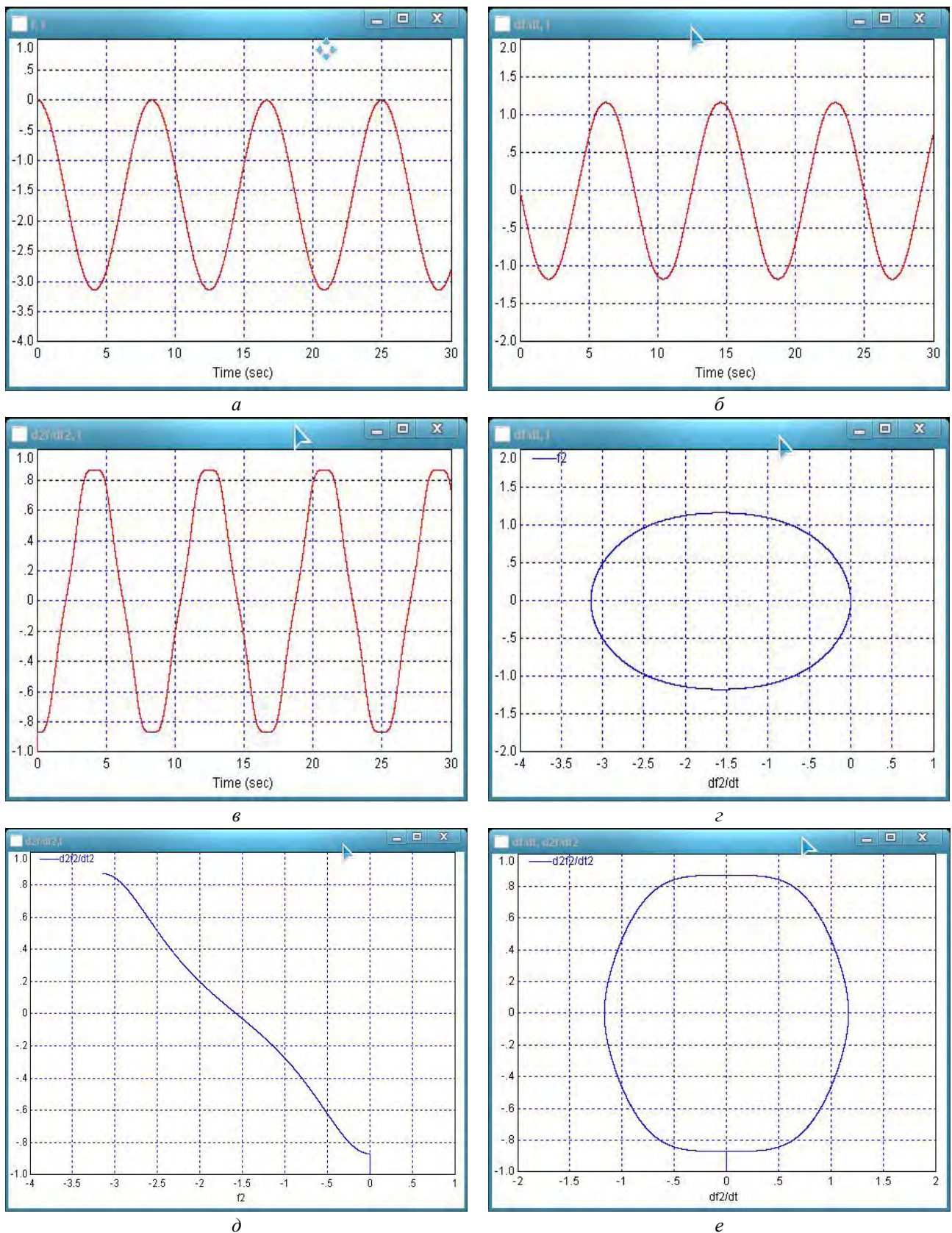


Рис. 2. Фазові портрети  $j(t)$  – а,  $j_2(t)$  – б,  $j_2(t)$  – в,  $j_2(j)$  – г,  $j_2(j)$  – д та  $j_2(j_2)$  – е при:  $m_1 = 10^4$  кг ;  $m_2 = 10^4$  кг ;  $H = 15$  м ;  $k = 0,1$  ; початкова швидкість  $j_2 = 0$

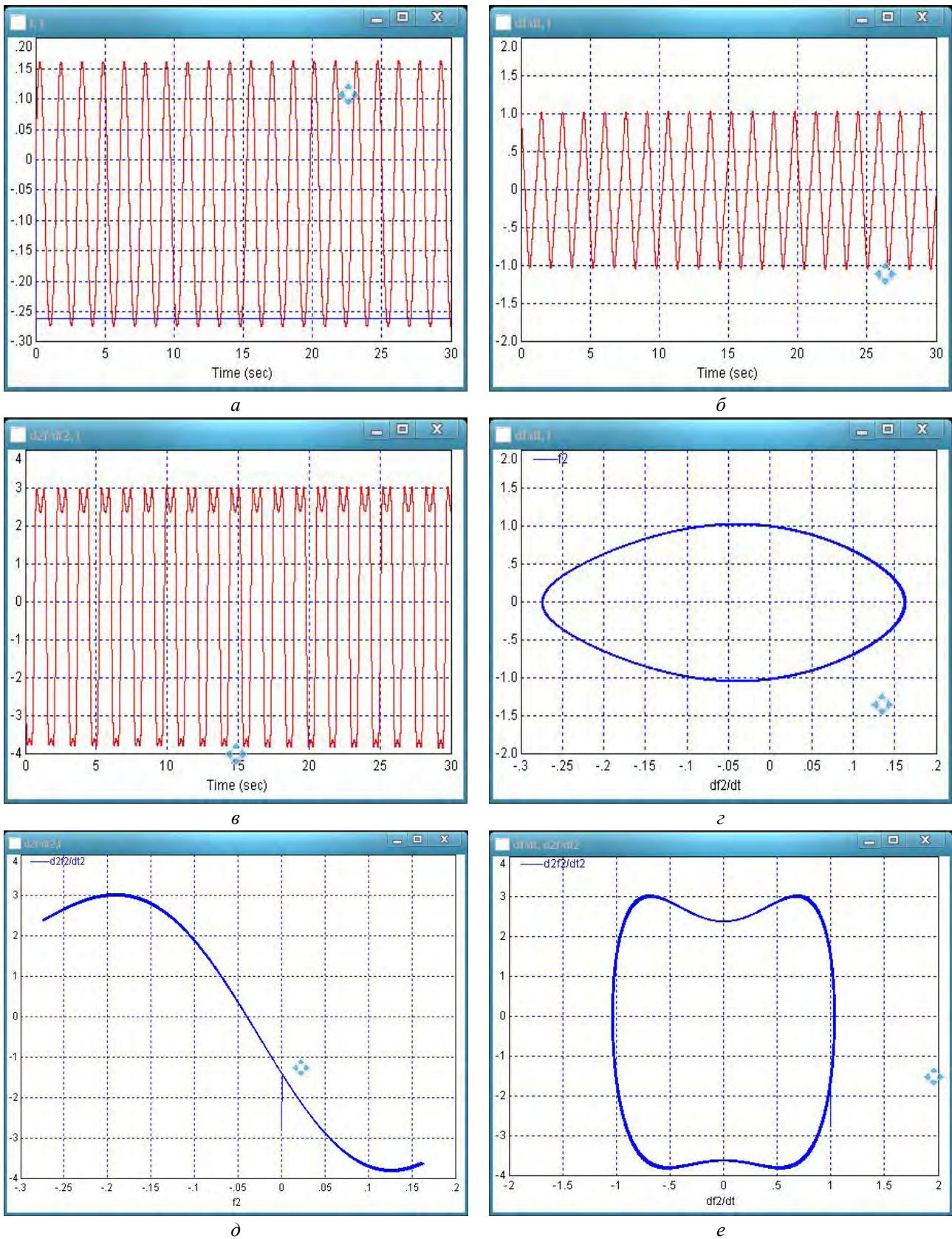


Рис. 3. Фазові портрети  $j(t)$  – а,  $\dot{j}(t)$  – б,  $\ddot{j}(t)$  – в,  $\dot{j}(j)$  – г,  $\ddot{j}(j)$  – д та  $\ddot{j}(\dot{j})$  – е при:  $m_1 = 10^4$  кг ;  
 $m_2 = 2 \cdot 10^5$  кг ;  $H = 15$  м ;  $k = 0,1$  ; початкова швидкість  $\dot{j}_0 = 1$  с<sup>-1</sup>

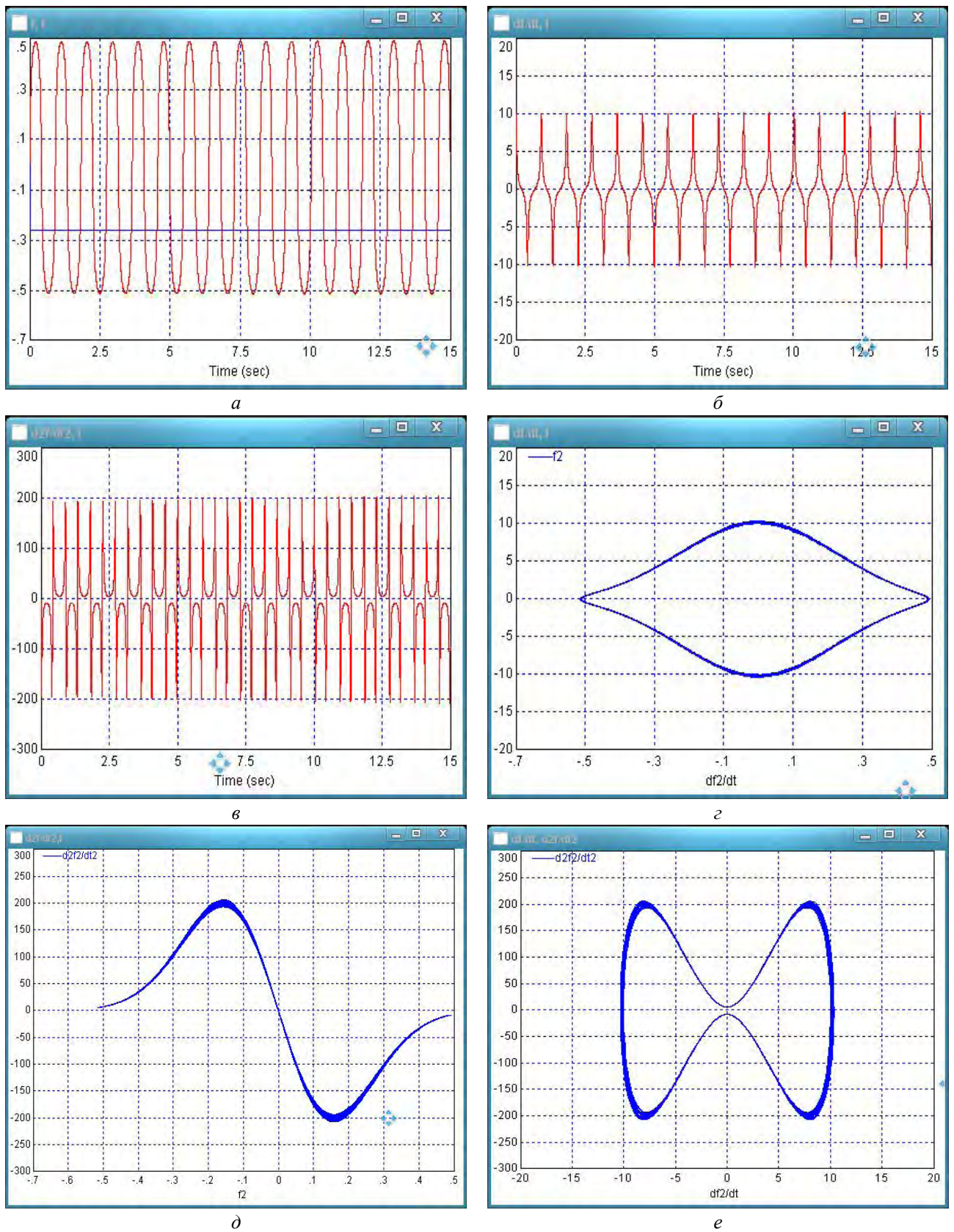


Рис. 4. Фазові портрети  $j(t)$  – а,  $j(t)$  – б,  $j(t)$  – в,  $j(j)$  – г,  $j(j)$  – д та  $j(j)$  – е при:  $m_1 = 10^4 \text{ кг}$  ;  
 $m_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг}$  ;  $H = 15 \text{ м}$  ;  $k = 0,1$  ; початкова швидкість  $j = 10 \text{ с}^{-1}$

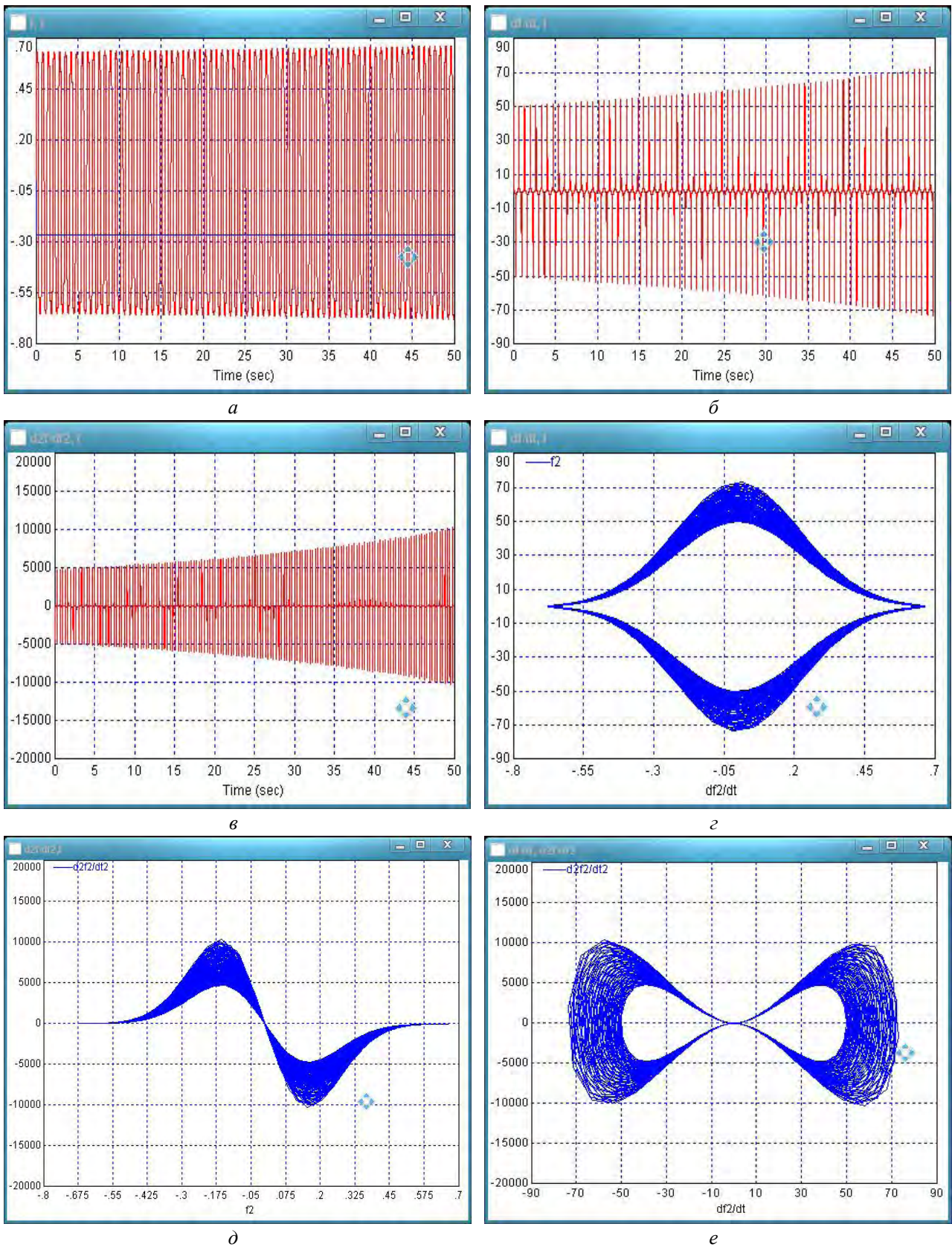


Рис. 5. Фазові портрети  $j(t)$  – а,  $j(f)$  – б,  $f_2(t)$  – в,  $f_2(j)$  – г,  $f_2(j)$  – д та  $f_2(f)$  – е при:  $m_1 = 10^4$  кг ;  $m_2 = 2 \cdot 10^5$  кг ;  $H = 15$  м ;  $k = 0,1$  ; початкова швидкість  $j_0 = 50$  с<sup>-1</sup>

### Выводы

1. Приведены усовершенствованные аналитические методы расчета динамических нагрузок кранов в процессах их пуска/остановки (в рамках моделей Брауде–Тер-Мхитарова; Ландау) дают возможность восстанавливать основные закономерности движения элементов динамической системы “вантажник – канат – вантаж” мостового крана и условия, при которых амплитуды маятниковых колебаний груза становятся значительными.

2. При проектировании груза на канате способствует наличие в уточненных динамических (расчетных) моделях/схемах нелинейных элементов, пропорциональных ( $\sim \dot{j}^2 \cdot j$ ) до квадрата угловой скорости на угол отклонения от вертикали ( $j$ ) или его тригонометрической функции ( $\sin / \cos$ ). Выявить влияние на динамику рассматриваемой крановой системы таких возмущений можно с помощью численного анализа на фазовых портретах системы (классического – ( $j, \dot{j}$ ) и высших порядков – ( $j, \ddot{j}$ ), ( $\dot{j}, \ddot{j}$ )).

3. Полученные в работе результаты можно далее использовать для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчета динамических нагрузок в крановых системах и других грузоподъемных машинах как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации с целью повышения эффективности управления ими.

1. Волков Д.П. Динамика и прочность одноковшовых экскаваторов / Д.П. Волков. – М.: Машиностроение, 1965. – 463 с.
2. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин / М.М. Гохберг. – Л.: Машиностроение, 1976. – 450 с.
3. Брауде В.И. Системные методы расчета грузоподъемных машин / В.И. Брауде, М.С. Тер-Мхитаров. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-е, 1985. – 181 с.
4. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
5. Брауде В.И. Вероятностные методы расчета грузоподъемных машин / В.И. Брауде. – Л.: Машиностроение, 1978. – 229 с.
6. Брауде В.И. Надежность порталных и плавучих кранов / В.И. Брауде. – Л.: Машиностроение, 1967. – 154 с.
7. Артемьев П.П. Грузоподъемные машины на речном транспорте / А.А. Артемьев, В.И. Брауде, Н.П. Гагарин. – М.: Транспорт, 1981. – 245 с.
8. Волков К.А. Имитационное моделирование эксплуатационных нагрузок в механизме изменения вылета уравновешенных стрел порталных кранов / К.А. Волков // в кн.: Портальная перегрузочная техника. – Л.: ЛИИТ, 1980. – С. 12–23.
9. Звягинцев Н.В. Эксплуатационные нагрузки стреловых конструкций грейферных порталных кранов: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Н.В. Звягинцев. – Л.: ЛИИТ, 1971. – 23 с.
10. Иванов Г.И. Исследование нагрузок причальных контейнерных перегружателей и разработка путей повышения их надежности: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Г.И. Иванов. – Л.: ЛПИ, 1982. – 16 с.
11. Казак С.А. Расчеты динамических процессов в крановых и экскаваторных механизмах / С.А. Казак. – Рукопись деп. в ВИНТИ, № 355. – 78. – М., 1979. – 208 с.
12. Андрианов Е.Н. Определение вероятностных характеристик нагружения грейферного механизма подъема методами статистической динамики / Е.Н. Андрианов // в кн.: Сборник трудов молодых научных работников ЛИИТ. – Л.: ЛИИТ, 1974. – С. 92–101.
13. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т.1. Механика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
14. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин. – М.: Наука, 1974. – 264 с.
15. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
16. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1966. – 336 с.
17. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 418 с.
18. Фаддеева В.Н. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента / В.Н. Фаддеева, Н.М. Терентьев. – М.: Гостехиздат, 1954. – 400 с.