

## ВИЗНАЧЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ДОВЖИНИ СТРИЖНЯ З ПРУЖНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ КІНЦІВ

© Пелешко І. Д., Іванейко В. М., 2013

Виведено рівняння стійкості стисненого стрижня з пружним закріпленням кінців, що враховує вплив переміщень однієї опори стрижня на переміщення іншої. За отриманим рівнянням можна визначити коефіцієнт розрахункової довжини  $\mu$ , стрижня, що знаходиться у складі стрижневої системи.

**Ключові слова:** металеві конструкції, стійкість, розрахункова довжина, стиснутий стрижень.

**The paper proposes the equation of stability compressed bar with elastic supports, which takes into effect of displacement one support to the other. Solution of the equation allows computing a coefficient of reduced length  $\mu$  of the bar in the frame structure.**

**Key words:** steel structures, stability, reduced length, compressed bar.

### Постановка проблеми

Розв'язання задачі оптимізації металевих стрижневих конструкцій дає змогу покращити їхні техніко-економічні показники. Загалом задача оптимізації металевих стрижневих конструкцій – це задача пошуку мінімального (максимального) значення функції мети в області допустимих проектних рішень. Область допустимих проектних рішень визначена системою обмежень, які враховують нормативні, конструктивні, технологічні та інші вимоги до конструкції. Для перевірки системи обмежень у задачах оптимізації складних стрижневих систем (рамні конструкції, просторові конструкції покриттів), потрібно виконувати розрахунок на стійкість стиснено-зігнутих стрижнів.

### Аналіз досліджень та публікацій

При розрахунку на стійкість стрижня у нормах [1] використовують поняття розрахункової довжини стрижня, що вперше уведено Ф.С. Ясинським [4]. Розрахункова довжина визначається для двох головних площин стрижня та дорівнює довжині уявного, центрально-стисненого шарнірно закріпленого стрижня, критична стисна сила якого дорівнює критичній силі стрижня із заданим закріпленням кінців [2].

Одним зі способів визначення розрахункової довжини стрижня в складі стрижневої системи, є запропонований у [5–7]. У [5, 6] розглядають виокремлений зі стрижневої системи стрижень, а стрижневу систему, яка примикає до його кінців, розглядають як пружні опори від зміщення та повороту. Коефіцієнти пружного закріплення для цього стрижня визначають за статичним розрахунком системи, у якій відсутній розглядуваний стрижень. Для такого стрижня виведене трансцендентне рівняння стійкості відносно параметра  $V$ , визначивши який, обчислюють значення коефіцієнта розрахункової довжини  $\mu$  [5, 6]. Схожим чином можна використовувати формули, наведені в табл. С.2 додатка до ДБН [1] та в табл. 23 [8], щоб обчислити коефіцієнт розрахункової довжини для деяких видів пружно закріпленого стрижня.

Зазначимо, що для отримання зазначених рівнянь стійкості в [5, 6] прийнято, що переміщення опор стрижня є незалежними, тобто поворот або зміщення однієї опори не викликають переміщення у іншій. Таке спрощення обмежує використання цих рівнянь для визначення розрахункової довжини деяких стрижнів стрижневої системи.

### Мета та завдання дослідження

Отримати рівняння стійкості стисненого стрижня з пружним закріпленням від зміщення та повороту його кінців з урахуванням впливу переміщень однієї опори на переміщення іншої. Обґрунтувати можливість використання отриманого рівняння стійкості для визначення розрахункової довжини стрижня в складі стрижневої системи та порівняти отримані результати зі значеннями, поданими в нормах [1].

### Викладення основного матеріалу дослідження

За основу при виведенні рівняння стійкості пружно закріпленого стрижня візьмемо спосіб, наведений у [5]. Для розв'язання поставленої задачі прийняті припущення, які зазвичай приймають у задачах стійкості стрижневих систем:

- стрижнева система утворена з абсолютно прямих стрижнів, які з'єднані між собою жорстко або шарнірно;
- усі стрижні системи до моменту втрати стійкості мають лише поздовжні деформації (стиск або розтяг);
- для стрижнів системи у момент втрати стійкості не враховуються поздовжні деформації, а враховуються лише деформації згину;
- в момент втрати стійкості деформації стрижнів системи малі, що дозволяє використовувати наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стрижня;
- за дії критичного навантаження на систему стійкість втрачає лише один стрижень.

Розглянемо плоску стрижневу систему  $CC0$ , яку зображено на рис. 1, і на вузол Б якої діє сила  $P$ .

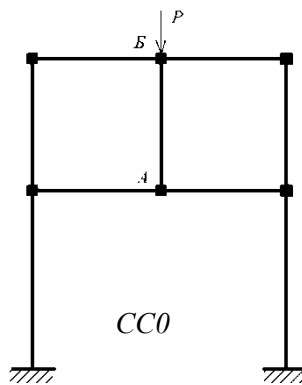


Рис. 1. Стрижнева система  $CC0$

Від дії сили  $P$  у стрижнях системи виникають поздовжні зусилля  $N$ . Після досягнення зусиллям  $N$  у стрижні АБ критичного значення кінці стрижня будуть мати деякі переміщення. Виокремимо стрижень АБ з системи  $CC0$  після досягнення зусиллям  $N$  деякого критичного значення. На кінцях такого виокремленого стрижня АБ діють по три зусилля  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 2,а).

Переміщення вузлів стрижня АБ у напрямі дії  $i$ -го зусилля позначимо  $\varphi_i$ . Пронумеруємо зусилля  $i$  так: 1 –  $Q_A$ , 2 –  $M_A$ , 3 –  $Q_B$ , 4 –  $M_B$  (рис. 2,а, 2,б). Прийmemo, що додатні напрями дії моменту та поперечної сили відповідають напрямку моменту  $M_A$  та сили  $Q_B$  на рис. 2,б, а додатні напрями переміщень відповідають напрямкам переміщень  $\varphi_2$  та  $\varphi_3$  на рис. 2,а. Стрижневу систему без стрижня АБ позначимо  $CC1$ , а дію відкинутого стрижня на  $CC1$  замінимо відповідними реакціями (рис. 2,б).

Виокремлений стрижень АБ (рис. 2,в) можна розглядати як стрижень з пружно закріпленими кінцями від зміщення та повороту (наявність опори у вертикальному напрямку пояснюється тим, що ми нехтуємо деформаціями згину стрижнів до моменту втрати системою стійкості), а стрижневу систему  $CC1$  – як пружну опору для цього стрижня. При цьому опори стрижня АБ є залежними, тобто поворот або зміщення вузла А викликає переміщення вузла Б.

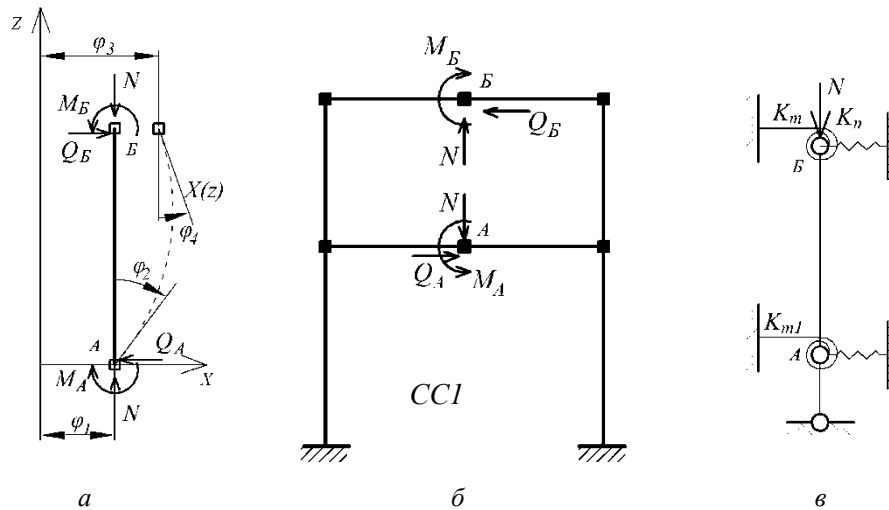


Рис. 2. Стрижнева система CCI та виокремлений стрижень AB: а – зусилля, що діють на виокремлений стрижень AB; б – стрижнева система CCI; в – схема пружного закріплення стрижня AB відповідно до позначень табл. С.2 [1]

Запишемо рівняння стійкості стрижня AB, що зображений на рис. 2,в, опорами для якого є вузли стрижневої системи CCI.

Для цього спочатку виразимо переміщення та зусилля на кінці виділеного стрижня AB (рис. 2, а) через переміщення та зусилля на його початку. Використаємо формули, наведені у [5], які виведені шляхом інтегрування диференційного рівняння згину балки, з урахуванням прийнятих нами правил знаків:

$$\varphi_3 = \varphi_1 + A\varphi_2 - CQ_A - BM_A; \quad (1)$$

$$\varphi_4 = D\varphi_2 - BQ_A - ZM_A; \quad (2)$$

$$M_B = K\varphi_2 + DM_A + AQ_A, \quad (3)$$

де  $M_A, M_B, Q_A, Q_B$  – моменти та поперечні сили, що прикладені у вузлах стрижня,  $A, B, C, D, K, Z$  – функції параметра  $\nu$ , який використовують для визначення розрахункової довжини стрижня.

При виведенні формул (1) – (3) у [5] було прийнято, що поперечні навантаження на стрижень відсутні, тобто  $Q_A = Q_B$ , а функції  $A, B, C, D, K, Z$  позначено так:

$$A = \frac{L \cdot \sin \nu}{\nu}, \quad B = \frac{L^2 (1 - \cos \nu)}{\nu^2 EI}, \quad C = \frac{L^3 (\nu - \sin \nu)}{\nu^3 EI}, \quad (4)$$

$$D = \cos \nu, \quad K = \frac{\nu \cdot EI \cdot \sin \nu}{L}, \quad Z = \frac{L \cdot \sin \nu}{\nu \cdot EI},$$

де  $L$  – довжина стрижня,  $E$  – модуль пружності матеріалу стрижня,  $I$  – момент інерції перерізу стрижня AB.

Враховуючи прийняті нами правила знаків, виразимо переміщення  $\varphi_i$  від дії сил  $M$  та  $Q$  у системі CCI через переміщення  $\delta_{ij}$  від дії відповідних одиничних сил:

$$\varphi_1 = -Q_A \delta_{11} + M_A \delta_{12} + Q_A \delta_{13} - M_B \delta_{14}; \quad (5)$$

$$\varphi_2 = -Q_A \delta_{21} + M_A \delta_{22} + Q_A \delta_{23} - M_B \delta_{24}; \quad (6)$$

$$\varphi_3 = -Q_A \delta_{31} + M_A \delta_{32} + Q_A \delta_{33} - M_B \delta_{34}; \quad (7)$$

$$\varphi_4 = -Q_A \delta_{41} + M_A \delta_{42} + Q_A \delta_{43} - M_B \delta_{44}, \quad (8)$$

де  $\delta_{ij}$  – переміщення вузлів А та Б системи  $CCI$  в напрямку  $i = \overline{1..4}$  від дії одиничної сили в напрямку  $j = \overline{1..4}$ .

Враховуючи, що переміщення вузлів А та Б у системі  $CCI$  та у виокремленому стрижні АБ однакові, прирівняємо значення переміщень кінця Б стрижня АБ за формулами (1) та (2), з відповідними переміщеннями вузла Б в  $CCI$  згідно з формулами (7) та (8). Для цього у формули (1) та (2) підставимо переміщення  $\varphi_1, \varphi_2$  з формул (5) та (6) та виконаємо відповідні перетворення:

$$\begin{aligned} -Q_A \delta_{31} + M_A \delta_{32} + Q_A \delta_{33} - M_B \delta_{34} = \\ -Q_A \delta_{11} + M_A \delta_{12} + Q_A \delta_{13} - M_B \delta_{14} + (-Q_A \delta_{21} + M_A \delta_{22} + Q_A \delta_{23} - M_B \delta_{24}) A - M_A B - Q_A C \end{aligned} \quad (9)$$

$$-Q_A \delta_{41} + M_A \delta_{42} + Q_A \delta_{43} - M_B \delta_{44} = (-Q_A \delta_{21} + M_A \delta_{22} + Q_A \delta_{23} - M_B \delta_{24}) D - M_A Z - Q_A B. \quad (10)$$

Знайдемо момент  $M_B$  на кінці стрижня за формулою (3) через зусилля та переміщення на його початку. Для цього підставимо до формули (3) переміщення  $\varphi_2$  із формули (6):

$$M_B = \frac{Q_A (-\delta_{21} K + \delta_{23} K + A) + M_A (D + \delta_{22} K)}{1 + \delta_{24} K}. \quad (11)$$

Позначимо множники біля  $M_A$  та  $Q_A$  символами  $R$  та  $S$ :

$$R = \frac{(-\delta_{21} K + \delta_{23} K + A)}{1 + \delta_{24} K}, \quad S = \frac{(\delta_{22} K + D)}{1 + \delta_{24} K}. \quad (12)$$

Тоді формулу (11) можна записати так:

$$M_B = Q_A R + M_A S. \quad (13)$$

Підставимо у формули (9) та (10) значення  $M_B$  із формули (13):

$$\begin{cases} Q_A (\delta_{31} - \delta_{33} + R \delta_{34} - \delta_{11} + \delta_{13} - R \delta_{14} - \delta_{21} A + \delta_{23} A - R \delta_{24} A - C) + \\ + M_A (-S \delta_{34} - \delta_{32} + \delta_{12} + S \delta_{14} + \delta_{22} A + S \delta_{24} A - B) = 0 \\ Q_A (\delta_{41} - \delta_{43} + R \delta_{44} - \delta_{21} D + \delta_{23} D - R \delta_{24} D - B) + \\ + M_A (S \delta_{24} D - Z - \delta_{42} - S \delta_{44} + \delta_{22} D) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

У результаті отримано систему двох однорідних рівнянь з невідомими  $M_A$  та  $Q_A$ . Оскільки нас цікавить розв'язок системи рівнянь (14), у якому невідомі не дорівнюють нулю, що відповідає появі нової форми рівноваги стрижневої системи (втраті системою стійкості), то прирівняємо до нуля детермінант цієї системи рівнянь та розкриємо його:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \delta_{22} + S \delta_{11} \delta_{44} - D \delta_{24} S \delta_{11} - Z \delta_{11} - \delta_{24} \delta_{11} + D \delta_{22} \delta_{33} + R A \delta_{22} \delta_{44} - A B \delta_{22} - \delta_{34} R D \delta_{22} + \\ + \delta_{14} A \delta_{22} + C D \delta_{22} + \delta_{14} R D \delta_{22} - 2 \delta_{13} D \delta_{22} - A \delta_{22} \delta_{34} + S \delta_{33} \delta_{44} - D \delta_{24} S \delta_{33} - \delta_{24} \delta_{33} - \\ - Z \delta_{33} + A \delta_{12} S \delta_{44} - A \delta_{23} S \delta_{44} + C S \delta_{44} - R \delta_{23} \delta_{44} + R \delta_{12} \delta_{44} - R B \delta_{44} - 2 \delta_{13} S \delta_{44} + A \delta_{23} Z + \\ + A \delta_{23} \delta_{24} - B \delta_{34} S - A \delta_{12} \delta_{24} + 2 \delta_{13} D \delta_{24} S + \delta_{34} R \delta_{24} + \delta_{34} R Z - A \delta_{12} Z + D \delta_{12} B - D \delta_{23} B - \\ - A \delta_{24} R Z + 2 D \delta_{12} \delta_{23} - C D \delta_{24} S - \delta_{14} A \delta_{24} S - D \delta_{12} \delta_{34} S - \delta_{14} R \delta_{24} + B \delta_{14} S - D \delta_{23} \delta_{14} S + \\ + 2 \delta_{14} \delta_{34} S + D \delta_{24} R \delta_{23} - D \delta_{24} R \delta_{12} + D \delta_{24} R B + \delta_{34} A \delta_{24} S + B A \delta_{24} S + 2 \delta_{13} \delta_{24} + 2 \delta_{13} Z - \\ - \delta_{14} R Z - A \delta_{24}^2 R + D \delta_{12} \delta_{14} S + D \delta_{23} \delta_{34} S - C \delta_{24} - C Z - \delta_{14} \delta_{23} + \delta_{14} \delta_{12} - \delta_{14}^2 S - \delta_{14} B - D \delta_{12}^2 - \\ - D \delta_{23}^2 + \delta_{34} \delta_{23} - \delta_{34} \delta_{12} - \delta_{34}^2 S + B \delta_{34} + B \delta_{23} - B \delta_{12} + B^2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Підібравши найменше значення параметра  $\nu$ , яке задовольняє трансцендентне рівняння (15), можна визначити розрахункову довжину  $l_{ef}$  пружно закріпленого стрижня (рис. 2,в) згідно з формулою:

$$l_{ef} = \mu L, \quad (16)$$

де 
$$\mu = \frac{\pi}{\nu}. \quad (17)$$

Щоб розв'язати рівняння (15), достатньо визначити переміщення  $\delta_{ij}$ , які виникають від дії відповідних одиничних сил, що прикладені у вузлах закріплення стрижня та характеризують пружне закріплення стрижня АБ. При цьому для граничних видів закріплення стрижня (повне защемлення, вільний кінець) переміщення  $\delta_{ij}$  при  $i=j$  потрібно прийняти нульовим для абсолютного закріплення або нескінченним за відсутності опори в даному напрямку, а відповідні переміщення  $\delta_{ij}$  при  $i \neq j$ , дорівнюватимуть нулю.

### Визначення коефіцієнта розрахункової довжини для деяких схем закріплення стрижня

Визначимо коефіцієнти розрахункової довжини  $\mu$  для стрижнів з різними закріпленнями, використовуючи формулу (17), та порівняємо отримані результати з результатами, наведеними у нормах [1]. Результати порівняння запишемо у табл. 1.

Для визначення коефіцієнта розрахункової довжини стрижня згідно з формулою (17) спочатку підставимо у рівняння (15) значення переміщень  $\delta_{ij}$ , що відповідають граничним умовам закріплення стрижня (повне защемлення, вільний кінець). Отримані часткові випадки рівняння (15) записані у табл. 1 відповідно до схем закріплення стрижня.

Для схем 5, 6, 7 із пружним закріпленням стрижня у таблиці коефіцієнт розрахункової довжини стрижня визначався для стрижнів АБ у складі стрижневих систем, зображених на рис. 3,а, б, в відповідно. Коефіцієнти жорсткості пружного закріплення  $K_n, K_m, K_{m1}$  для цих схем, які потрібні для визначення коефіцієнта  $\mu$  згідно з формулами табл. С.2 ДБН [1], визначали згідно з формулами, що наведені в табл. С.3 ДБН [1]. При цьому прийняли, що  $EI = 1716 \text{ кНм}^2$ ,  $l_1 = 3 \text{ м}$ ,  $l_2 = 2 \text{ м}$ ,  $l_3 = 6 \text{ м}$ .

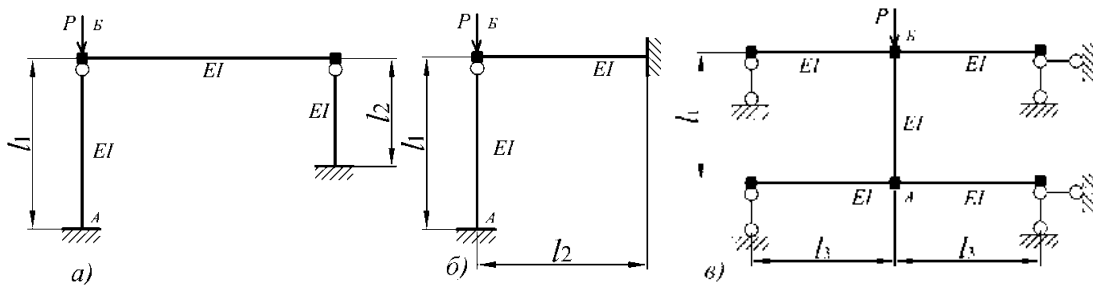



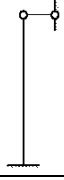
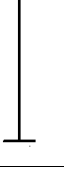


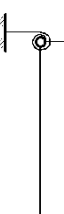
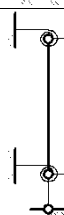
Рис. 3. Схеми для визначення розрахункової довжини пружно закріплених стрижнів:

а–в – схеми рамних систем із табл. С.3 ДБН[1]

Враховуючи, що значення коефіцієнтів пружного закріплення стрижня АБ у схемах, що зображені на рис. 3а, б, в, відомі, то відповідні переміщення  $\delta_{i,j}$ , що потрібні для визначення коефіцієнта  $\mu$  згідно з (17), визначали за формулами:

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \frac{1}{K_n}, \\ \delta_{44} &= \frac{1}{K_m}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{K_{m1}} \end{aligned} \quad (18)$$

### Коефіцієнти розрахункової довжини $\mu$ для різних схем закріплення стрижня

№	Схема закріплення	Переміщення $\delta_{ij}$ , що відповідають граничним умовам закріплення	Часткові випадки рівняння стійкості (15)	Значення коефіцієнта розрахункової довжини $\mu$ згідно з	
				рівнянням (15)	ДБН [1]
1		$\delta_{33} = 0,$ $\delta_{44} = \infty,$ $\delta_{22} = \infty$	$A + CK = 0$	1,000	1,000
2		$\delta_{33} = 0,$ $\delta_{44} = 0,$ $\delta_{22} = \infty$	$-CD + AB = 0$	0,699	0,700
3		$\delta_{33} = 0,$ $\delta_{44} = 0,$ $\delta_{22} = 0,$ $\delta_{11} = 0$	$-CZ - B = 0$	0,500	0,500
4		$\delta_{22} = \infty,$ $\delta_{33} = \infty,$ $\delta_{11} = 0,$ $\delta_{44} = 0$	$D = 0$	2,000	2,000
5		$\delta_{11} = 0,$ $\delta_{22} = 0,$ $\delta_{44} = \infty$	$-D\delta_{33} - CD + AB = 0$	1,066	0,991
6		$\delta_{11} = 0,$ $\delta_{22} = 0,$ $\delta_{33} = 0$	$-CZ + B^2 + CD\delta_{44} -$ $-AB\delta_{44} = 0$	0,567	0,568
7		$\delta_{11} = 0,$ $\delta_{33} = 0$	$-CZ + B^2 + CT\delta_{22} - AB\delta_{22} +$ $+CD\delta_{44} - AB\delta_{44} + A^2\delta_{22}\delta_{44} +$ $+CK\delta_{22}\delta_{44} = 0$	0,722	0,722

Підставимо значення  $\delta_{ij}$  визначені згідно з формулами (18) у рівняння (15) та розв'яжемо його для кожної схеми закріплення стрижня. Розв'язавши рівняння (15), визначимо значення критерію стійкості  $V$ . Маючи значення  $V$ , коефіцієнт розрахункової довжини  $\mu$  та розрахункову довжину  $l_{ef}$  стрижня визначаємо за формулами (17) (16).

Для стрижнів із жорстким закріпленням кінців значення коефіцієнта розрахункової довжини  $\mu$ , що отримані згідно з формулою (17), практично збігаються із значеннями, що наведені

в табл. 1.9.7 ДБН [1]. Для стрижнів із пружним закріпленням результати показали невелику розбіжність, із значеннями у табл. С.2 [1].

### Висновки

Виведено рівняння стійкості стисненого стрижня з пружним закріпленням його кінців від зміщення та повороту з урахуванням припущень, що зазвичай приймаються в технічних розрахунках. Отримане рівняння враховує вплив переміщення однієї опори на переміщення іншої опори, що дозволяє застосовувати його для визначення розрахункової довжини стиснених стрижнів у складі більшості стрижневих систем.

Результати порівняння коефіцієнта розрахункової довжини стрижнів із різними схемами закріплення кінців зі значеннями, що наведені в [1], підтверджують можливість використання отриманого рівняння для визначення розрахункової довжини стрижня при розв'язуванні задач оптимізації металевих стрижневих систем.

Надалі необхідно порівняти результати розв'язання рівняння (15) із відомими значення розрахункової довжини стрижнів складних стрижневих систем.

1. *Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення та монтажу: ДБН В.2.6-163:2010.* – Офіц. вид. — К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – (Державні будівельні норми України).
2. *Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер.* – К.: Сталь, 2002. – 597 с.
3. *Расчет стержневых систем на устойчивость методом перемещений / А. В. Себешев.* – Новосибирск: гос. архитектур.-строит. ун-т. (Сибстрин), 2004. – 84 с.
4. *Избранные работы по устойчивости сжатых стержней / Ф. С. Ясинский.* – М.: Гостехтеориздат, 1952. – 427 с.
5. *Мельников Н. П. Устойчивость упругих стержневых систем / Н. П. Мельников, В. М. Вахуркин, Б. Г. Ложкин.* – М.: Проектстальконструкция, 1951. – Вып. 1086, Ч. 1. – 142 с.
6. *Мельников Н. П. Расчет стержневых систем на устойчивость. Справочные данные и примеры / Н. П. Мельников, В. М. Вахуркин, Б. Г. Ложкин.* – М.: Проектстальконструкция, 1954. – 142 с.
7. *Устойчивость сжатых стальных стержней / С. Д. Лейтес [под ред. И. К. Снитко].* – М., 1954. – 308 с.
8. *Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81\*)* – М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1989. – 149 с.