УДК 528.1:528.4

ЙМОВІРНО-МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ОБМЕЖЕНОЇ КІЛЬКОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

В. Рябчій, В. Рябчій

Державний вищий навчальний заклад “Національний гірничий університет”

Ключові слова: ймовірність, довірчий інтервал, загальна арифметична середина, ймовірна арифметична середина, проста арифметична середина.

Постановка проблеми

Практично в усіх навчальних посібниках з математичної обробки геодезичних вимірів наведено математичну обробку результатів нерівноточних вимірів однієї величини [1, 3–7, 9, 10, 12–14 та ін.]. При цьому виникають деякі питання стосовно обґрунтування значення довірчої ймовірності під час побудови довірчих інтервалів, знаходження ймовірнішого значення за результатами нерівноточних вимірів однієї величини, меж довірчого інтервалу для істинного значення виміряної величини і властивостей нормованих відхилень тощо.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Оскільки математичній обробці результатів як рівноточних, так і нерівноточних вимірів однієї величини присвячено багато робіт відомих вчених нашої країни та інших держав, то обмежимося тільки [1, 3–7, 9, 10, 12–14]. Але робіт з обширним дослідженням таких результатів вимірів не виявлено.

Невирішені частини загальної проблеми

Можливо, уважний читач скаже: якщо кількість вимірів невелика, то які можуть бути дослідження? Але в тому і справа, що зроблено спробу за обмеженої кількості вимірів визначити послідовність дій, розрахунків, які б дозволили з ймовірністю, близькою до одиниці, стверджувати, що отримані результати вимірів та обчислень доброякісні та обґрунтувати довірчу ймовірність, яку беруть для побудови довірчих інтервалів.

Постановка завдання

Визначити послідовність дій і розрахунків, які дали б змогу обґрунтовано обчислювати значення довірчої ймовірності для побудови довірчих інтервалів, а також ймовірніше значення за результатами нерівноточних вимірів однієї величини, межі довірчого інтервалу для істинного значення виміряної величини і властивості нормованих відхилень.

Виклад основного матеріалу проблеми

Виконуючи традиційну математичну обробку результатів нерівноточних вимірів однієї величини, будують довірчі інтервали для істинних значень виміряної величини, дисперсії середньої квадратичної похибки одиниці ваги, середніх квадратичних похибок одиниці ваги і загальної арифметичної середини.

Розглянемо приклад (таблицю), де наведено результати нерівноточних вимірювань перевищення між двома точками. Також у цій таблиці наведено результати обчислення загальної та ймовірної арифметичних середин, середні квадратичні похибки одиниці ваги і кожного виміру, нормовані відхилення тощо за наведеними нижче відповідними формулами:

$$\overline{X} = \frac{[p\,x]}{[p]}, \qquad \dot{X} = \frac{[\sqrt{p}\,x]}{[\sqrt{p}]}; \tag{1}$$

$$\overline{v} = x - \overline{X}, \qquad \dot{v} = x - \dot{X}; \tag{2}$$

$$\overline{\mu} = \sqrt{\frac{[p\overline{v}\,\overline{v}]}{n-1}}, \qquad \dot{\mu} = \sqrt{\frac{[p\dot{v}\dot{v}]}{n-1}}; \tag{3}$$

$$m_{\overline{X}} = \frac{\overline{\mu}}{\sqrt{[p]}}, \qquad m_{\dot{X}} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{[p]}}; \tag{4}$$

$$\overline{m} = \frac{\overline{\mu}}{\sqrt{p}}, \qquad \dot{m} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{p}}. \tag{5}$$

Обчислення загальної та ймовірної арифметичних середин

№ з/п	x, мм	p	$\overline{X}$, мм	$\overline{v}$, мм	$\overline{\mu}$, мм	$m_{\overline{X}}$, мм	$\overline{m}$, мм	$\overline{t}$	$\overline{t}^2$	$\dot{X}$, мм	$\dot{v}$, мм	$\dot{\mu}$, мм	$m_{\dot{X}}$, мм	$\dot{m}$, мм	$\dot{t}$	$\dot{t}^2$
1	2	3	5	4	5	5	6	7	8	9	10	9	9	11	12	13
1	12,9	1	11,28	1,6	5,00	0,90	5,00	0,32	0,11	11,58	1,3	5,03	0,90	5,03	0,26	0,07
2	14,3	2		3,0			3,53	0,85	0,73		2,7			3,56	0,76	0,58
3	16,5	3		5,2			2,88	1,81	3,27		4,9			2,90	1,69	2,87
4	9,8	5		-1,5			2,23	-0,66	0,44		-1,8			2,25	-0,79	0,63
5	7,3	4		-4,0			2,50	-1,59	2,54		-4,3			2,51	-1,70	2,90
6	9,2	5		-2,1			2,23	-0,93	0,87		-2,4			2,25	-1,06	1,12
7	11,6	4		0,3			2,50	0,13	0,02		0,0			2,51	0,01	0,00
8	10,4	2		-0,9			3,53	-0,25	0,06		-1,2			3,56	-0,33	0,11
9	13,7	3		2,4			2,88	0,84	0,70		2,1			2,90	0,73	0,53
10	13,1	2		1,8			3,53	0,51	0,27		1,5			3,56	0,43	0,18
∑	118,8	31		6,0				1,03	9,00		3,0				0,00	9,00

Для побудови довірчого інтервалу для істинного значення виміряної величини використано формули:

$$\overline{X} - t_\beta m_{\overline{X}} \le X \le \overline{X} + t_\beta m_{\overline{X}}\,, \qquad (6)$$

$$\dot{X} - t_\beta m_{\dot{X}} \le X \le \dot{X} + t_\beta m_{\dot{X}}\,, \qquad (7)$$

де $\overline{X}$ – загальна арифметична середина; $\dot{X}$ – ймовірна арифметична середина; $m_{\overline{X}}$ і $m_{\dot{X}}$ – середні квадратичні похибки загальної та ймовірної арифметичних середин відповідно; t_β – коефіцієнт Стьюдента.

Враховуючи дані таблиці й використовуючи значення загальної та ймовірної арифметичних середин, довірчі інтервали за довірчої ймовірності β = 0,9 у числовому вигляді такі:

$$11{,}28 - 1{,}83 \cdot 0{,}90 \le X_{\overline{X}} \le 11{,}28 + 1{,}83 \cdot 0{,}90,$$

$$9{,}63 \le X_{\overline{X}} \le 12{,}93;$$

$$11{,}58 - 1{,}83 \cdot 0{,}90 \le X_{\dot{X}} \le 11{,}58 + 1{,}83 \cdot 0{,}90,$$

$$9{,}93 \le X_{\dot{X}} \le 13{,}23.$$

Порівнюючи побудовані інтервали (6) і (7) з результатами вимірів (табл., стовпець 2), можна побачити, що по шість вимірів з десяти виходять за межі цих інтервалів.

Взагалі значення довірчої ймовірності переважно беруть від 0,9 і більше, але як воно визначається “на око” або залежно від важливості виміряної величини? Повинні бути якісь критерії, які залежать від точності вимірів та їх кількості. Вибір і прийняття значення довірчої ймовірності повинні бути обґрунтованими.

В.Д. Большаков і Ю.І. Маркузе у наведених прикладах використовують значення довірчої ймовірності 0,90 і 0,95 [3].

М.Г. Відуєв і Г.С. Кондра у [4] пишуть: “… довольно часто возникают недоумения с выбором доверительной вероятности… Здесь мы укажем, что выбор доверительной вероятности обуславливается практическими соображениями… Обычно ее принимают равной 0,95 или 0,99”. Також вони посилаються на В.К. Христова, який рекомендує приймати її 0,90.

С.П. Войтенко в [5] у наведених прикладах використовує значення довірчої ймовірності 0,95.

Н.В. Смирнов у [13] пише: “Вероятность выбирают по усмотрению и устанавливают число повторных наблюдений…”. Але зовсім не обґрунтовано “усмотрение”.

Ймовірність p попадання випадкових величин x в якийсь інтервал (a, b) згідно з [2, 3, 5, 7, 8 та ін.] можна обчислити за формулою:

$$p(a < X < b) = 0{,}5(\Phi_{(t_b)} - \Phi_{(t_a)})\,, \qquad (8)$$

де $\Phi_{(t_a)}$ і $\Phi_{(t_b)}$ – інтеграл ймовірностей або функція Лапласа; t_a і t_b – аргументи функції Лапласа – нормовані значення максимальних відхилень випадкової величини від математичного сподівання M_x або межі інтегрування.

Аргументи функції Лапласа можна обчислити за формулами:

$$t_a = \frac{a - M_x}{\sigma_x}\,, \qquad t_b = \frac{b - M_x}{\sigma_x}\,, \qquad (9)$$

де σ_x – середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Беручи приклад, наведений у [5], за основу і припускаючи, що загальна та ймовірна арифметичні середини дорівнюють математичному сподіванню, а середні квадратичні похибки загальної та ймовірної арифметичної середин дорівнюють середньому квадратичному відхиленню, зробимо відповідні розрахунки з визначення ймовірності попадання результатів вимірів перевищення за даними таблиці в інтервал $7{,}3 \le X < 16{,}5$.

Для випадку, коли $M_x = \overline{X}$:

$$t_a = \frac{7{,}3 - 11{,}28}{0{,}90} = -4{,}42\,,$$

$$t_b = \frac{16{,}5 - 11{,}28}{0{,}90} = +5{,}80\,.$$

Використовуючи значення аргументів t_a і t_b у таблицях, наведених у [1], знайдемо значення інтегралів ймовірності:

$$\Phi_{(t_a)} = 0{,}9999906,$$

$$\Phi_{(t_b)} = 0{,}999999993.$$

Тоді ймовірність за формулою (8) дорівнюватиме

$$p(a < \overline{X} < b) = 0{,}5(0{,}999999993 + 0{,}9999906) =$$
$$= 0{,}9999952965.$$

Для випадку, коли $M_x = \dot{X}$:

$$t_a = \frac{7{,}3 - 11{,}58}{0{,}90} = -4{,}76\,,$$

$$t_b = \frac{16{,}5 - 11{,}58}{0{,}90} = +5{,}47\,;$$

$$\Phi_{(t_a)} = 0{,}9999976,$$

$$\Phi_{(t_b)} = 0{,}999999942;$$

$$p(a < \dot{X} < b) = 0{,}5(0{,}9999976 + 0{,}999999942) =$$
$$= 0{,}999998771.$$

Можна вважати, що різниця між отриманими значеннями ймовірностей дуже мала, і що ці ймовірності дуже близькі одна одній, хоч при $M_x = \dot{X}$ ймовірність ближча до одиниці, ніж при $M_x = \overline{X}$.

Ці визначені ймовірності можна прийняти за довірчі ймовірності, які відповідають фактичному інтервалу, і використовувати їх для побудови довірчих інтервалів для істинних значень виміряної величини та інших величин, враховуючи значення, необхідні для обчислення загальної та ймовірної арифметичних середин. Оскільки в таблицях значень ймовірностей таких значень, які одержані у наведеному прикладі, немає, то необхідно брати максимальне значення ймовірності, звичайно це β = 0,999.

Звісно, ця обчислена ймовірність прийнята з деякими допущеннями. Але в теорії похибок і математиці завжди роблять якісь припущення, а це одержане значення хоч якось обґрунтовано. Звичайно у разі потреби можна використовувати й інші значення довірчої ймовірності, пам'ятаючи при цьому, що зменшення ймовірності звужує довірчий інтервал [5].

З урахуванням обчисленої довірчої ймовірності довірчі інтервали для істинного значення виміряної величини будуть:

$$11{,}28 - 4{,}78 \cdot 0{,}90 \le X_{\overline{X}} \le 11{,}28 + 4{,}78 \cdot 0{,}90,$$

$$6{,}98 \le X_{\overline{X}} \le 15{,}58;$$

$$11{,}58 - 4{,}78 \cdot 0{,}90 \le X_{\dot{X}} \le 11{,}58 + 4{,}78 \cdot 0{,}90,$$

$$7{,}28 \le X_{\dot{X}} \le 15{,}88.$$

Порівнюючи значення інтервалів зі значеннями результатів вимірів, можна побачити, що ці інтервали покривають майже всі значення результатів вимірів. Тільки одне – саме максимальне значення – виходить за межі інтервалів.

Однак треба зауважити, що іноді під час обчислення ймовірності за формулою (8) одержують значення довірчої ймовірності, менше за 0,9. Причиною цього є невідповідність (залежність) між значеннями загальної, простої та ймовірної арифметичних середин, відповідними середніми квадратичними похибками і довжиною фактичного інтервалу. Тобто одержані виміри визначають саме таку довірчу ймовірність. Вочевидь, це свідчить про те, що недостатня кількість вимірів або одержані середні квадратичні похибки великі за значенням.

Тому в таких випадках необхідно збільшити кількість вимірювань, що зазначено у [13]. Це може призвести до збільшення фактичного інтервалу. Після цього треба виконати нові розрахунки спочатку. З цього очевидно, що бажано виміри виконувати за методикою, яка б забезпечила одержання високої ймовірності. Вважається, що у наведеному вище грубі помилки і систематичні похибки відсутні.

Тепер поміркуємо стосовно складу інтервалів. Один вимір не може визначати інтервал. Мінімальна кількість вимірів повинна дорівнювати двом. Але можна припустити, що інтервал буде визначений тим точніше, чим більша кількість вимірів. З цього випливає: ймовірність твердження, що істинне значення виміряної величини міститься у такому інтервалі, тим більша, чим більша кількість вимірів у ньому.

Основні фактори, що впливають на попадання випадкової величини в якийсь інтервал, це: довжина інтервалу, значення середньої квадратичної похибки, закон розподілу, який впливає на випадкові величини та похибки результатів вимірів. У нашому випадку вважатимемо, що похибки підпорядковані нормальному закону розподілу.

Тепер розглянемо значення самих вимірів. Ймовірність появи кожного рівноточного виміру та сама, а нерівноточного – залежить від точності кожного виміру. При цьому два виміри будуть особливими – виміри з мінімальним і максимальним значеннями. Ці два виміри визначають фактичний інтервал (не довірчий), у якому з ймовірністю, близькою до одиниці, міститься істинне значення виміряної величини.

Допитливий читач може зауважити, що тут діє аксіома Архімеда і, зробивши один, два або більше додаткових вимірів, інтервал можна збільшити і так до нескінченності. Це правильно, але ми маємо конкретний інтервал і його величина повинна бути обмеженою згідно з допусками для цього виду вимірів. Можна припустити, що теоретична довжина основного інтервалу не повинна перевищувати потроєного значення середньої квадратичної похибки загальної або ймовірної арифметичних середин у кожен бік від самих значень загальної або ймовірної арифметичних середин, тобто

$$L_{теор} \le 6\, m_{\overline{x}} \text{ або } L_{теор} \le 6\, m_{\dot{x}} \quad . \qquad (10)$$

Для наведеного прикладу

$$L_{теор} = 6 \cdot 0{,}90 = 5{,}4 \text{ мм}.$$

Але можливі інші підходи. Наприклад, враховуючи не тільки значення середньої квадратичної похибки, а й кількість вимірів, коефіцієнт Стьюдента, значення довірчої ймовірності, закон розподілу випадкових величин тощо. Наприклад, можна використовувати такі формули:

$$L_{теор} = t_{\beta}\, m_{\overline{X}} \sqrt{n-1} \text{ або } L_{теор} = t_{\beta}\, m_{\dot{X}} \sqrt{n-1}\,. \quad (11)$$

Приймаючи для наведеного прикладу $\beta = 0{,}999$, одержимо

$$L_{теор} = 4{,}78 \cdot 0{,}90\sqrt{10-1} = 12{,}9 \text{ мм}.$$

Треба зазначити, що практично інтервали, визначені за формулами (10), дуже жорсткі, вони не охоплюють всіх вимірів. Якась частина вимірів залишається за межами цих інтервалів. Інтервали, визначені за формулами (11), охоплюють усі значення вимірів, а якщо і залишається, то тільки невелика кількість. Іноді також теоретична довжина перевищує значення фактичного інтервалу. Це добре, оскільки свідчить, що всі виміри доброякісні.

Визначення інших варіантів теоретичної величини такого інтервалу у цій роботі не розглядається.

Згідно з відомостями з математики такий інтервал можна назвати замкнутим, оскільки мінімальне і максимальне значення, які є його межами, входять до нього і використовуються для обчислення значень загальної та ймовірної арифметичних середин. І можна стверджувати з ймовірністю, яка практично дорівнює одиниці, що обчислені значення загальної та ймовірної арифметичних середин ніколи не дорівнюватимуть значенням початку і кінця цього інтервалу. Тому, водночас, цей інтервал можна назвати відкритим.

Також треба мати на увазі, що є теоретична і фактична довжини інтервалу. Фактичний інтервал у загальному вигляді можна записати так

$$L_{[a,b]} = \left[a \le x \le b\right], \qquad (12)$$

де $a = x_{\min}$ і $b = x_{\max}$.

Довжину фактичного інтервалу можна обчислити за формулою

$$L_{ф[a,b]} = (b-a) + \varepsilon = (x_{\max} - x_{\min}) + \varepsilon\,, \qquad (13)$$

де ε – точність взяття відліків за геодезичним приладом.

У нашому прикладі $\varepsilon = 0{,}1$ мм, тому фактична довжина основного інтервалу становить

$$L_{ф[a,b]} = (16{,}5 - 7{,}3) + 0{,}1 = 9{,}3 \text{ мм}.$$

Після встановлення фактичного інтервалу для істинного значення виміряних величин визначимо кількість можливих виміряних значень якоїсь величини (не кількість вимірів). На перший погляд, їх кількість може бути нескінченна. Але це не так. Вочевидь, кількість можливих значень виміряної величини залежить від розміру інтервалу і точності взяття відліків конкретним геодезичним приладом. Наприклад, якщо електронний тахеометр дає відліки значення виміряної довжини до міліметра, то кількість можливих значень виміряної довжини обмежується кількістю міліметрів у цьому інтервалі. Якщо відліки за горизонтальним кругом тахеометра беруться до десятих часток секунди, то кількість можливих значень дорівнює кількості десятих часток усіх секунд в інтервалі. Такі припущення дають змогу визначити кількість усіх можливих випадків, а кількість випадків, що сталися, дорівнюватиме кількості вимірів.

Тепер можна сказати, що кожен фактичний інтервал складається з невеличких інтервалів, які називатимемо малими. Тобто кожен фактичний інтервал містить малі інтервали. Їх розмір обмежений точністю взяття відліків приладом.

Значення виміряних перевищень у таблиці наведено до десятих часток міліметра. Враховуючи, що довжина фактичного інтервалу $L_{\phi[a,b]}$ дорівнює 9,3 мм, то кількість малих інтервалів дорівнюватиме 93. Але у фактичному інтервалі, крім малих, існують ще проміжкові інтервали, кількість яких дорівнює кількості проміжків між суміжними вимірами, а їх довжина по осі X дорівнює різниці двох суміжних значень виміряної величини.

При цьому можливий збіг результатів вимірів. Тоді довжина такого проміжкового інтервалу дорівнюватиме нулю, а цифра над відповідним малим інтервалом – кількості збіжностей.

Треба зауважити, що у випадку збіжності усіх значень виміряної величини загальна арифметична та ймовірна арифметичні середини дорівнюватимуть цьому значенню результатів вимірів. У такому разі можна припустити, що загальна та ймовірна арифметичні середини збігаються з істинним значенням виміряної величини і похибки вимірів дорівнюють нулю.

Допитливий читач може заперечити: “Хоча це правильно, але навіщо ці міркування”? Вочевидь, наведене вище підтверджує відому істину, що дослідження виміряних величин – це такий процес, який, можливо, буде продовжуватись доти, доки існуватимуть геодезичні виміри. Крім цього, це дає можливість порівняти довжину основного інтервалу з його теоретичним значенням, тобто провести додаткові дослідження.

Без урахування ваг вимірів фактичний інтервал має середину або геометричний центр, значення якого можна знайти за простою формулою

$$x_c = \frac{a+b}{2}. \quad (14)$$

Для наведених у таблиці результатів вимірів визначимо геометричний центр інтервалу

$$x_c = \frac{16{,}5+7{,}3}{2} = 11{,}9 \text{ мм}.$$

Що дає визначення геометричного центра інтервалу? Якщо значення і кількість вимірів відносно центра інтервалу приблизно однакові, то це додатково підтверджує, що систематичної похибки у вимірах немає.

Якщо порівняти значення геометричного центра зі значеннями загальної та ймовірної арифметичних середин, то можна побачити, що значення ймовірної арифметичної середини розташоване ближче (майже збігається) до геометричного центра, ніж значення загальної арифметичної середини.

Тепер спробуємо визначити точніше інтервал, в якому міститься істинне значення виміряної величини. Відомо, що загальна арифметична середина – це значення виміряної величини, яке близьке до істинного значення і має такі властивості:

$$[p\bar{v}] = 0 \text{ і } \left[\bar{v}\sqrt{p}\right] \neq 0. \quad (15)$$

Ймовірна арифметична середина має інші властивості:

$$[p\dot{v}] \neq 0 \text{ і } \left[\dot{v}\sqrt{p}\right] = 0. \quad (16)$$

Оскільки виконується важлива умова (16), то можна припустити, що значення ймовірної арифметичної середини більше наближене до істинного. Між значеннями загальної та ймовірної арифметичних середин є різниця. При цьому значення загальної арифметичної середини може бути більшим або меншим від значення ймовірної арифметичної середини. Тобто, якщо на осі відкласти значення загальної та ймовірної арифметичних середин, то загальна арифметична середина буде або праворуч, або ліворуч від ймовірної арифметичної середини.

Можна вважати, що половину точнішого інтервалу визначили. Тепер треба визначити його другу половину. Можна припустити, що друга половина цього інтервалу буде в протилежний бік від ймовірної арифметичної середини від загальної арифметичної середини. Тепер з’ясуємо, яке значення набуває інша межа цього точнішого інтервалу.

Якщо від значення ймовірної арифметичної середини у протилежний бік від загальної арифметичної середини відкласти відрізок, що дорівнює їх різниці, то у фактичному інтервалі нерівноточних вимірів одержимо якесь значення. Аналізуючи це значення і виконавши деякі розрахунки, встановили, що воно дуже близьке до значення простої арифметичної середини. При цьому просту арифметичну середину знаходять за результатами вимірів без урахування ваг цих вимірів.

Не враховуючи ваги вимірів, за даними, наведеними в таблиці, обчислимо значення простої арифметичної середини, а також відхилення значень простої та загальної арифметичних середин від значення ймовірної арифметичної середини відповідно:

$$\overline{X}_n = \frac{[x]}{n} = \frac{118{,}8}{10} = 11{,}88 \text{ мм},$$

$$\overline{X} - \dot{X} = 11{,}28 - 11{,}58 = -0{,}30 \text{ мм}, \quad (17)$$

$$\overline{X}_n - \dot{X} = 11{,}88 - 11{,}58 = +0{,}30 \text{ мм}. \quad (18)$$

Як видно, за абсолютною величиною ці різниці дорівнюють одна одній. Треба зауважити, що в інших прикладах, які тут не наведені, іноді виникали невеликі розходження за рахунок округлення.

Отже, знайдемо серединний інтервал між значеннями простої та загальної арифметичних середин. Значення ймовірної арифметичної середини міститься практично в його середині.

За результатами інших розрахунків, які в цій роботі не наведено, можна записати дві нерівності:

$$\bar{X} \le \dot{X} \le \bar{X}_n \text{ або } \bar{X}_n \le \dot{X} \le \bar{X} . \quad (19)$$

Оскільки значення ймовірної арифметичної середини міститься практично в середині інтервалу між загальною та простою арифметичними серединами, то можна припустити, що воно найближче до істинного значення виміряної величини.

Тепер визначимося з нормованими відхиленнями. Відомо, що нормовану похибку t знаходять для побудови кривої Гаусса і обчислюють за формулою

$$t = \frac{\Delta}{m}, \quad (20)$$

де Δ – істинна похибка; m – середня квадратична похибка.

Приймемо, що відхилення результатів нерівноточних вимірів від загальної та ймовірної арифметичних середин (стовпці 4 і 10 відповідно) дорівнюють істинним похибкам:

$$\bar{v} = \Delta \text{ і } \dot{v} = \Delta . \quad (21)$$

Вважаючи, що відхилення близькі до істинних похибок, обчислимо нормовані відхилення та їх квадрати від загальної та ймовірної арифметичних середин за даними табл. Результати наведені у табл. (стовпці 7, 8 і 12, 13 відповідно).

Суми квадратів нормованих відхилень дорівнюють:

$$\left[\bar{t}^2\right] = n-1 \text{ і } \left[\dot{t}^2\right] = n-1 . \quad (22)$$

Це підтверджує результати, одержані у [11]. При цьому $\left[\dot{t}\right] = 0$, що підтверджується властивостями ймовірної арифметичної середини, а сума $\left[\bar{t}\right] = 1{,}03$. Визначимось, чому повинне дорівнювати це значення

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{\bar{v}_1}{\bar{m}_1} + \frac{\bar{v}_2}{\bar{m}_2} + \ldots + \frac{\bar{v}_n}{\bar{m}_n} . \quad (23)$$

Враховуючи, що $\bar{m} = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p}}$, вираз (23) матиме такий вигляд

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{\bar{v}_1\sqrt{p_1}}{\bar{\mu}} + \frac{\bar{v}_2\sqrt{p_2}}{\bar{\mu}} + \ldots + \frac{\bar{v}_n\sqrt{p_n}}{\bar{\mu}} \quad (24)$$

або

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{\left[\bar{v}\sqrt{p}\right]}{\bar{\mu}} . \quad (25)$$

При цьому $\left[\bar{v}\sqrt{p}\right] \ne 0$, оскільки виконується умова $\left[p\bar{v}\right] = 0$.

З урахуванням обчислення відхилень результатів вимірів від загальної арифметичної середини (2) вираз (24) набуде такого вигляду

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{1}{\bar{\mu}}(\sqrt{p_1}(x_1 - \bar{X}) + \sqrt{p_2}(x_2 - \bar{X}) + \ldots$$

$$\ldots + \sqrt{p_n}(x_n - \bar{X})) = \frac{\left[x\sqrt{p}\right] - \bar{X}\left[\sqrt{p}\right]}{\bar{\mu}} . \quad (26)$$

Додатково зробимо такі дії. Всі члени рівняння (26) поділимо на $\left[\sqrt{p}\right]$

$$\frac{\left[\bar{t}\right]}{\left[\sqrt{p}\right]} = \frac{1}{\bar{\mu}}\left(\frac{\left[x\sqrt{p}\right]}{\left[\sqrt{p}\right]} - \bar{X}\right) . \quad (27)$$

Враховуючи формулу обчислення ймовірної арифметичної середини (1), рівняння (27) набуде такого вигляду

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{\left[\sqrt{p}\right]}{\bar{\mu}}(\dot{X} - \bar{X}) . \quad (28)$$

Підставивши у (25) і (28) додатково обчислені та відповідні дані з таблиці, одержимо відповідно:

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{5{,}16}{5{,}00} = 1{,}03 ,$$

$$\left[\bar{t}\right] = \frac{17{,}18}{5{,}00}(11{,}58 - 11{,}28) = 1{,}03 .$$

Тобто контролювати $\left[\bar{t}\right]$ можна за формулами (25) або (28).

Враховуючи вирази (17) і (18), формула (28) встановлює цікаву функціональну залежність між нормованими відхиленнями від загальної арифметичної середини і самими значеннями загальної, ймовірної, простої арифметичних середин та іншими величинами.

Тепер визначимо, чому дорівнює $\left[\dot{t}\right]$

$$\left[\dot{t}\right] = \dot{t}_1 + \dot{t}_2 + \ldots + \dot{t}_n = \frac{\dot{v}_1}{\dot{m}_1} + \frac{\dot{v}_2}{\dot{m}_1} + \ldots + \frac{\dot{v}_n}{\dot{m}_1} =$$

$$= \frac{\dot{v}_1\sqrt{p_1}}{\dot{\mu}} + \frac{\dot{v}_2\sqrt{p_2}}{\dot{\mu}} + \ldots + \frac{\dot{v}_n\sqrt{p_n}}{\dot{\mu}} = \frac{\left[\dot{v}\sqrt{p}\right]}{\dot{\mu}} . \quad (29)$$

Враховуючи першу властивість відхилень результатів нерівноточних вимірів від ймовірної арифметичної середини (16), чисельник виразу (29) дорівнюватиме нулю. Тому $\left[\dot{t}\right] = 0$.

Висновки та пропозиції

Враховуючи думку багатьох авторів і наведене вище, можна сказати, що оцінка точності за допомогою довірчих інтервалів має важливе значення. Якщо можна стверджувати, що істинне значення виміряної величини міститься в якомусь конкретному інтервалі, то це чудово. Звичайно, зменшення довжини такого інтервалу залишається одним з найважливіших завдань сучасних дослідників і завжди буде актуальною темою майбутніх досліджень.

1. Для побудови довірчих інтервалів під час математичної обробки результатів рівноточних і нерівноточних вимірів однієї величини пропонується обчислювати значення довірчої ймовірності.

2. Визначено склад фактичного інтервалу результатів вимірів. Кожен такий інтервал містить малі інтервали, розмір яких залежить від точності взяття відліків за геодезичним приладом.

3. Встановлено властивості нормованих відхилень від загальної та ймовірної арифметичних середин і формули, за якими можна контролювати їх обчислення.

4. Встановлена функціональна залежність між нормованими відхиленнями від загальної арифметичної середини і самими значеннями загальної, ймовірної та простої арифметичних середин.

5. Встановлено, що ймовірна арифметична середина розташована практично в середині інтервалу між значеннями простої та загальної арифметичних середин. При цьому її значення може бути більше або менше від значення загальної арифметичної середини.

6. Запропонована гіпотеза, що за результатами нерівноточних вимірів однієї величини можна встановити, що її істинне значення міститься в серединному інтервалі між значеннями простої та загальної арифметичних середин. Унаслідок цього можна вважати, що значення ймовірної арифметичної середини розташовані ближче до істинного значення, ніж значення загальної арифметичної середини.

Література

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов / В.Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
2. Большаков В.Д. Городская полигонометрия (Уравнивание и основы уравнивания) / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с.
3. Большаков В.Д. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: учеб. пособ. для вузов / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1979. – 303 с.
4. Видуев Н.Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
5. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посіб. / С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2003. – 216 с.
6. Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
7. Зазуляк П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навч. посіб. / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
8. Лукьянов В.Ф. Расчеты точности инженерно-геодезических работ / В.Ф. Лукьянов. – М.: Недра, 1981. – 285 с.
9. Мазмишвили А.И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.
10. Папазов М.Г. Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М.Г. Папазов, С.Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.
11. Рябчій В.А. Обґрунтування принципу найменших квадратів [текст] / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. праць. – Львів, 2012. – Вип. І (23). – С. 104–107.
12. Рябчій В.А. Теорія похибок вимірювань: навч. посіб. / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Д.: Національний гірничий університет, 2006. – 166 с.
13. Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии / Н.В. Смирнов, Д.А. Белугин. – М.: Недра, 1969. – 379 с.
14. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей: учеб. для геодезических вузов и факультетов / А.С. Чеботарев. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Ймовірно-математичний аналіз обмеженої кількості результатів нерівноточних вимірів однієї величини

В. Рябчій, В. Рябчій

Зроблено спробу обґрунтувати визначення довірчої ймовірності для побудови довірчих інтервалів при математичній обробці результатів нерівноточних вимірів однієї величини. Встановлено властивості нормованих відхилень від загальної та ймовірної арифметичних середин. Запропоновано гіпотезу серединного інтервалу, в якому може міститися істинне значення виміряної величини.

Вероятностно-математический анализ ограниченного количества результатов неравноточных измерений одной величины

В. Рябчий, В. Рябчий

Сделана попытка обосновать определение доверительной вероятности для построения доверительных интервалов при математической обработке результатов неравноточных измерений одной величины. Определены свойства нормированных отклонений от общей и вероятной арифметических середин. Предложена гипотеза серединного интервала, в котором может находиться истинное значение измеренной величины.

Probably and mathematical analysis results limited number of not equally accurate measurements of a value

V. Ryabchiy, V. Ryabchiy

The article is an attempt to justify the determination probability of a trust to construct confidence intervals for the mathematical treatment of the results of not equally accurate measurements of value. Defined properties of the normalized deviations of the total and the likely arithmetic midpoints. A hypothesis mean interval in which the true value can be measured quantity.