

## АЛГОРИТМ НЕПЕРЕРВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ НА СФЕРІ

П. Зазуляк, В. Нікулішин

Національний університет "Львівська політехніка"

**Ключові слова:** вейвлет, сфера, проекція, гравітаційне поле, топографія.

**Постановка проблеми**

Застосування неперервного вейвлет-перетворення до різноманітних фізичних процесів, заданих у прямокутній системі координат, зайняло важливе місце в дослідженні різноманітних явищ у частотній області [4, 5]. Однак під час дослідження явищ, які поширені на всій поверхні сферичного тіла (топографія планети, гравітаційне та магнітне поле), виникає потреба виконувати вейвлет-перетворення на поверхні сфери. Вивчаючи гравітаційне поле та топографію планет, інколи важливо використовувати анізотропні вейвлети, що дають змогу досліджувати явище в певному напрямку, який задається кутом повороту вейвлету  $\kappa$ .

**Зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями**

Зв'язок між гравітаційним полем планети та топографією у спектральній області дає змогу оцінити густину, товщину та теплову активність літосфери. Згідно з [7] спектральний зв'язок між гравітаційним полем та топографією виражається такими величинами, як адмітанс та коефіцієнт кореляції. Застосування неперервного вейвлет-перетворення на сфері до топографії та гравітаційного поля дає можливість обчислити ці спектральні характеристики, використовуючи отримані вейвлет-коефіцієнти.

**Аналіз основних досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми**

У [6] розроблене 2D-вейвлетоподібне перетворення для сферичної поверхні. Вейвлет-коефіцієнти тут визначаються як згортка між вихідними даними та функцією Бесселя нульового порядку з урахуванням сферичної корекції. Така корекція порушує геометричну форму функції для різних масштабів, що є очевидним для великих довжин хвилі.

**Невирішені частини загальної проблеми**

Після проектування вейвлету на сферу повинні зберігатися його основні властивості [1]. Тому виникає проблема у визначенні проекції, яка б дала б змогу зберегти усі властивості вейвлет-функції.

**Постановка завдання**

Метою роботи є розроблення алгоритму неперервного вейвлет-перетворення на сфері в рівнопроміжній (за меридіанами) азимутальній проекції.

**Виклад основного матеріалу проблеми**

**Теоретичні аспекти вейвлет-перетворення на сфері.** Нехай в прямокутній просторовій системі координат  $oxyZ$  задано функцію  $f(x, y)$ . Для неї двовимірне вейвлет-перетворення матиме вигляд

$$W(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \psi\left(\frac{x-b, y-b}{a}\right) dx dy, \quad (1)$$

де  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  – нормуючий множник,  $\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$  – вейвлет-

функція, в якій  $b$  відповідає за локалізацію функції по осях  $x$  та  $y$ , а параметр  $a$  масштабує функцію. Сама ж функція  $\psi(x, y)$  повинна володіти такими властивостями, як локалізація, нульове середнє, обмеженість та автомодельність [1]. Як базовий вейвлет використаємо тривимірний аналог МНАТ-вейвлету (рис. 1), який в просторовій системі координат записується

$$\psi(x, y) = \left[1 - (x^2 + y^2)\right] \cdot e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2}}. \quad (2)$$

Причина вибору саме МНАТ-вейвлету як базового полягає в тому, що зі зміною масштабу  $a$  частота його центрального піка змінюється так як частота вертикальної складової функції сили ваги, згенерованої точковою масою зі збільшенням глибини.

Вейвлет (2) можна використовувати для аналізу фізичних полів, заданих у прямокутній системі координат. Однак для явищ, заданих у сферичних координатах (наприклад, гравітаційне поле або топографія усєї планети), необхідно вводити корекцію за сферичність.

Для початку перейдемо від просторової прямокутної системи координат  $oxyZ$  до циліндричної системи координат  $(\delta, \rho, z)$ . З рис. 2 видно, що зв'язок між цими двома системами координат запишеться

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \delta \\ y &= \rho \cdot \sin \delta, \\ z &= z \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\rho$  – радіус-вектор точки в площині  $хоу$ ;  $\delta$  – кут між віссю  $ох$  і радіус-вектором.  $\delta$  змінюється від 0 до  $2\pi$ .

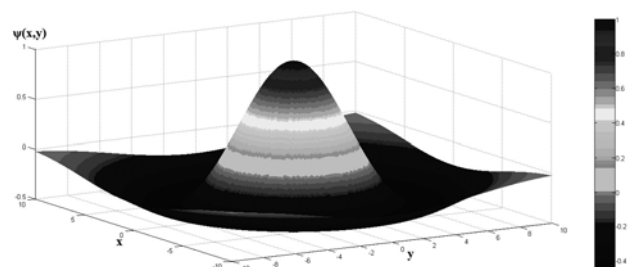


Рис. 1. Тривимірний МНАТ-вейвлет

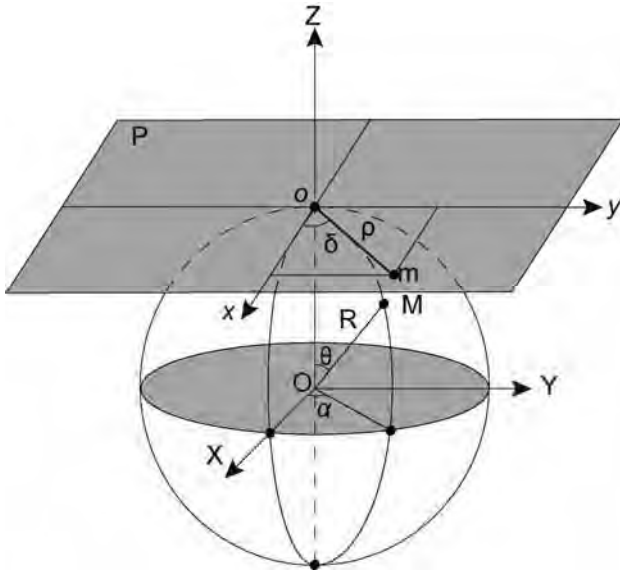


Рис. 2. Проектування вейвлету на сферу

Отже, запишемо (2) з урахуванням (3)

$$\psi(\delta, \rho) = (1 - \rho^2) \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}. \quad (4)$$

Відсутність  $\delta$  у рівнянні (4) пояснюється ізотропністю (симетричністю) вейвлету відносно осі OZ.

Задамо систему координат, в якій положення точки на поверхні сфери радіуса R визначатиметься координатами  $\alpha$  та  $\theta$  (рис. 2), де  $\theta$  – це полярна відстань, а  $\alpha$  – азимут точки (двогранний кут між початковим меридіаном та меридіаном, що проходить через цю точку). Також зауважимо, що площина P паралельна до площини OXY, а осі oZ та OZ збігаються. Вісь OX проходить через початковий меридіан ( $\alpha=0$ ), а для точки o значення  $\alpha$  та  $\theta$  дорівнюють нулю.

У разі проектування вейвлету з площини P на поверхню сфери потрібно, щоб збереглися всі властивості вейвлету [1]. Для цього має виконуватись умова, що частковий масштаб довжин по меридіанах дорівнював одиниці. В нормальній азимутальній проекції частковий масштаб по меридіанах визначається [2]

$$\mu_1 = \frac{d\rho}{R \cdot d\theta} = 1. \quad (5)$$

Після інтегрування отримаємо

$$\rho = R \cdot \theta + C, \quad (6)$$

де C – стала інтегрування. Оскільки, якщо  $\rho=0$  та  $\theta=0$  і  $C=0$ , то  $\rho = R \cdot \theta$ , тобто полярний радіус  $\rho$  дорівнює випрямленій дузі меридіана.

Отже, формули для рівнопроміжної за меридіанами азимутальної проекції матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \rho &= R \cdot \theta \\ \delta &= \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

Запишемо (4) з урахуванням (7)

$$\psi(\alpha, \theta) = (1 - R^2 \cdot \theta^2) \cdot e^{-\frac{R^2 \theta^2}{2}}. \quad (8)$$

Використовуючи декартові координати, площу нескінченно малого елемента можна визначити як

$dA = dx dy$ , для переходу у систему координат (3) з урахуванням (7) потрібно використати визначення Якобі:

$$dA = J d\theta d\alpha, \quad (9)$$

де

$$J = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \alpha)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

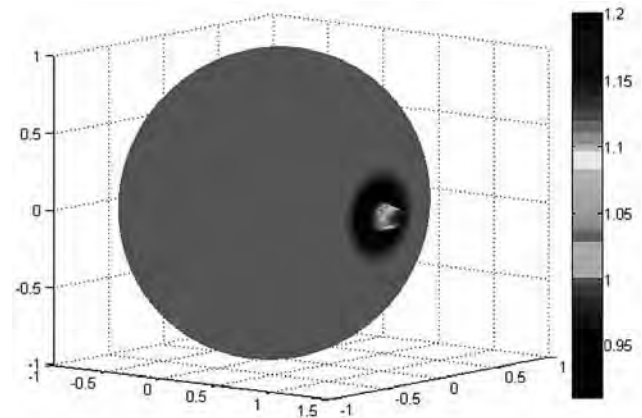
Для цього випадку

$$J = -R^2 \theta, \quad (11)$$

Вейвлет-перетворення запишеться

$$W(b, a) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \alpha) \cdot \psi\left(\frac{\theta, \alpha, b}{a}\right) J d\theta d\alpha. \quad (12)$$

На рис. 3 відображено вейвлет (8) на сфері радіуса  $R = 1$ , для  $a = 5$ .

Рис. 3. Вейвлет (6) на сфері для  $R=1$  та  $a=5$ 

#### Алгоритм вейвлет-перетворення на сфері

Нехай функція  $f(\theta, \alpha)$  на поверхні сфери радіуса  $R$  задана у географічних координатах  $\varphi, \lambda$  (рис. 4). Для  $b=0$  точки o та P збігатимуться. Проте, якщо  $b$  набуде відмінного від нуля значення, то координати точки o (початок прямокутної просторової системи координат oхуZ) у географічній системі координат набудуть значення  $\varphi_0, \lambda_0$ , а у системі координат  $\theta, \alpha$  залишаться незмінними.

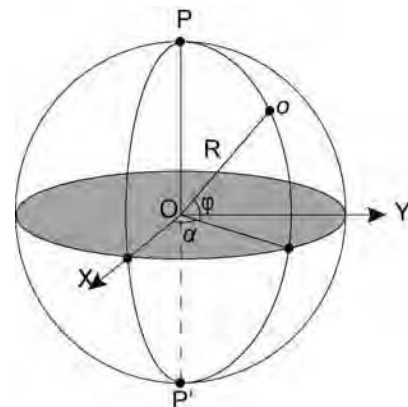


Рис. 4. Географічна система координат

Вейвлет-перетворення (12) буде правильним тільки для  $b=0$ . Для всіх інших  $b$  (12) переписемо у вигляді

$$W(b, a) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\phi, \lambda) \cdot \psi\left(\frac{\theta, \alpha, b}{a}\right) J d\theta d\alpha, \quad (13)$$

де зв'язок між  $\phi, \lambda$  та  $\theta, \alpha$  визначається за формулами сферичної тригонометрії [2]

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\cos \phi \sin(\lambda_0 - \lambda)}{\sin \phi \cos \phi_0 - \cos \phi \sin \phi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)} \end{aligned} \quad (14)$$

Всі вищенаведені результати отримано для ізотропного вейвлету (2). Розглянемо анізотропний МНАТ-вейвлет (рис. 5)

$$\psi(x, y) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (15)$$

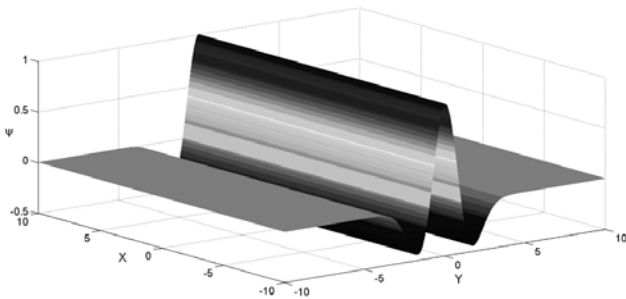


Рис. 5. Графік анізотропного МНАТ-вейвлету

Такий вейвлет дає змогу усереднювати досліджуване явище тільки в певному напрямку (в цьому випадку вздовж осі Y). Повертаючи вейвлет на кут  $\kappa$  у площині XY, можна отримати вейвлет-коефіцієнти, орієнтовані в різних напрямках. Враховуючи кут повороту  $\kappa$ , формули (3), запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \delta \cdot \cos \kappa \\ y &= \rho \cdot \sin \delta \cdot \cos \kappa \\ z &= z \end{aligned} \quad (16)$$

За аналогією з ізотропним вейвлетом запишемо загальний вигляд анізотропного вейвлету у сферичних координатах

$$\psi(\alpha, \theta, \kappa) = \left(1 - R^2 \cdot \theta^2 \cos^2 \delta \cos^2 \kappa\right) \cdot e^{-\frac{R^2 \theta^2 \cos^2 \delta \cos^2 \kappa}{2}}, \quad (17)$$

а самі вейвлет-коефіцієнти вже будуть функціями від  $a$  (масштабування),  $b$  (зміщення),  $\kappa$  (поворот)

$$W(b, a, \kappa) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \alpha) \cdot \psi\left(\frac{\theta, \alpha, b, \kappa}{a}\right) J d\theta d\alpha \quad (18)$$

Оскільки вейвлет-функції локалізовані в просторовій області, стає очевидною недоцільність проведення вейвлет-перетворення на всій поверхні сфери для  $a = \text{const}$  і  $b = \text{const}$ . Достатньо вибрати область розмірністю  $N \times N$  (за аналогією з віконним перетворенням Фур'є величину  $N$  надалі називатимемо шириною вікна).

Кількісною мірою локалізації функції  $\psi(x)$  можуть бути її центр і радіус  $t$  і  $\Delta t$  [3]:

$$t = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |\psi(x)|^2 dx, \quad (19)$$

$$\Delta t = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} [t - x]^2 \cdot |\psi(x)|^2 dx. \quad (20)$$

Довжина хвилі  $\lambda$  та частота центрального піка вейвлету  $\nu$  зв'язані співвідношенням

$$\lambda = \frac{1}{\nu}. \quad (21)$$

Значення відносної частоти  $\nu_0$  для  $a = 1$  визначається як максимум функції взаємної кореляції

$$p(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 1, 0) \cdot \cos(2\pi \nu x) dx. \quad (22)$$

Зв'язок між  $\nu_0, \nu$  та масштабом  $a$  виражається співвідношенням

$$\nu = \frac{\nu_0}{a}. \quad (23)$$

Для МНАТ-вейвлету  $\nu_0$  дорівнює 0,23. У таблиці представимо значення довжини хвилі та ширини вікна для різних масштабів.

Значення довжини хвилі та ширини вікна для різних масштабів вейвлету

Масштаб, $a$	Довжина хвилі $\lambda$ , км	Ширина вікна $\Delta t$ , км	Хвильове число, $2\pi/\lambda$
1	4	9	1,44513
5	22	43	0,28903
10	43	87	0,14451
25	109	217	0,05781
50	217	435	0,02890
80	348	696	0,01806
100	435	870	0,01445
150	652	1304	0,00963
200	870	1739	0,00723
250	1087	2174	0,00578
300	1304	2609	0,00482
350	1522	3043	0,00413
400	1739	3478	0,00361

Розглянемо основні етапи алгоритму для обчислення за формулами (13) та (18):

- задання значення масштабу  $a$ , параметра зміщення  $b$  та кута повороту  $\kappa$  (для анізотропного вейвлету);
- обчислення ширини вікна за формулою (20);
- визначення значень  $\phi_0, \lambda_0$  ( $\phi_0 = \phi_0 + b; \lambda_0 = \lambda_0 + b$ );
- визначення ширини вікна  $\Delta t_\phi$  та  $\Delta t_\lambda$  в кутовій мірі вздовж паралелі  $\phi_0$  та меридіана  $\lambda_0$ . Значення  $\Delta t_\phi$  та  $\Delta t_\lambda$  в радіанах знаходять за формулами

$$\begin{aligned} \Delta t_\phi &= \frac{\Delta t}{R \cdot \cos \phi}, \\ \Delta t_\lambda &= \frac{\Delta t}{R}; \end{aligned} \quad (23)$$

- обчислення значень вейвлет-коефіцієнтів з урахуванням (14)

$$W(a, \varphi_0, \lambda_0, \kappa) = \sum_{\lambda=\lambda_0-\frac{N_\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{N_\lambda}{2}} \sum_{\delta=\varphi_0-\frac{N_\varphi}{2}}^{\varphi_0+\frac{N_\varphi}{2}} J \cdot f(\lambda, \varphi) \psi\left(\frac{\theta, \alpha}{a}\right). \quad (24)$$

Циклічно змінюючи величини  $\varphi_0$  від  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  та  $\lambda_0$  від 0 до  $2\pi$  на  $b$ , обчислюємо вейвлет-спектри для всієї сферичної поверхні.

### Висновки

Отримані формули та розроблений алгоритм дають змогу обчислювати вейвлет-спектри фізичних полів, заданих на поверхні сфери. Також у роботі наведено формули зв'язку між масштабом та відносною довжиною хвилі центрального піка вейвлету. Для збільшення швидкодії алгоритму розраховано оптимальну ширину вікна  $1t$ .

У подальших дослідженнях планується обчислити спектральний зв'язок (адмітанс та коефіцієнт кореляції) між топографією та гравітаційним полем Місяця, використовуючи наведений алгоритм, і порівняти їх з теоретичним значенням.

### Література

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. Астафьева // Успехи физических наук. – Т.166. – № 11. – 1996. – С. 1145–1170. [Електронний ресурс] – Режим доступу до джерела: [http://www.isuct.ru/~artcol/articles/Uspekhi\\_Fiz\\_Nauk/wavelet-analys.pdf](http://www.isuct.ru/~artcol/articles/Uspekhi_Fiz_Nauk/wavelet-analys.pdf).
2. Вахрамеева Л.А., Математическая картография: учеб. для вузов / Л.А. Вахрамеева, Л.М. Бугаевский, З.Л. Казакова. – М.: Недра, 1986. – 286 с.
3. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов: учеб. пособ. / В. Витязев. – СПб.: Изд-во С. Петерб. ун-та. – 2001. – 61 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до джерела: <http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/wavelet.pdf>.
4. Утёмов Э.В. Технология обработки и интерпретации гравиметрических данных на основе “естественного” вейвлет-преобразования / Э. Утёмов, Д. Нурғалиев, Г. Хамидуллина // Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки. – Т. 1, Кн. 3. – 2010. – С.208–222 [Електронний ресурс] – Режим доступу до джерела: <http://elibrary.ru/item.asp?id=15519850>.
5. Cooper G.R.J. Interpreting potential field data using continuous wavelet transforms of their horizontal derivatives / G. Cooper // Computers & Geosciences.– University of the Witwatersrand, Johannesburg. – № 32. – 2006. – P.984–992 [Електронний ресурс] – Режим доступу до джерела: [https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2008/1/GF700/1/material\\_docente/bajar?i\\_d\\_material=174805](https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2008/1/GF700/1/material_docente/bajar?i_d_material=174805).
6. Kido M. Continuous wavelet-like filter for a spherical surface and its application to localized admittance function on Mars / M. Kido // Phys. Earth Planet. Inter. – Department of Geology and Geophysics and Minnesota Supercomputer Institute. – 2002. – 37 p. [Електронний ресурс] – Режим доступу до джерела: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031920102001760>.
7. Wiczeorek M. The gravity and topography of the terrestrial planets / M. Wiczeorek // Treatise on Geophysics.– Institut de Physique du Globe de Paris, France. – 2007. 35 P. [Електронний ресурс] – Режим доступу до джерела: <http://www.ipgp.fr/~wiczor/MyPapers/WiczeorekTOGSubmit.pdf>.

### Алгоритм непрерывного вейвлет-перетворення на сфері

П. Зазуляк, В. Нікулішин

Розроблено алгоритм непрерывного вейвлет-перетворення на сфері з використанням рівнопроміжної (за меридіанами) азимутальної проекції.

### Алгоритм непрерывного вейвлет-преобразования на сфере

П. Зазуляк, В. Никулишин

Разработан алгоритм непрерывного вейвлет-преобразования в сфере с использованием равнопромежуточной (по меридианам) азимутальной проекции.

### The algorithm of continuous wavelet transform on the sphere

P. Zazulyak, V. Nikulishyn

The algorithm of continuous wavelet transform on the sphere using azimuthal equidistant (with meridians) projection.

Essen 8-10 October
INTERGEO 2013
Web site: <http://www.intergeo.de>