УДК 519.248

С.В. Щербовських
Національний університет “Львівська політехніка”,
Науково-дослідна група ДБ / ТРИКАФ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ МІНІМАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ПЕРЕТИНІВ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАГАЛЬНИМ ЗАМІЩУВАЛЬНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

Запропонована математична модель надійності електротехнічної системи із загальним заміщувальним резервуванням. Така модель адекватно враховує вплив зміни навантаження на показники мінімальної множини перетинів. Для моделювання надійності застосовані динамічне дерево відмов та марковський аналіз.

Ключові слова: **мінімальна множина перетинів, заміщувальне резервування, модель надійності, динамічне дерево відмов, марковська модель.**

In the paper mathematical reliability model for electrical system with whole standby is proposed. Such model takes into account adequately load-sharing impact on minimal cut set indexes. For reliability modeling dynamic fault tree and Markov analysis is used.

Key words: **minimal cut set, standby redundancy, reliability model, dynamical fault tree, Markov model.**

Вступ. Постановка проблеми

Розроблення рекомендацій щодо підвищення надійності системи виконують на основі аналізу її «слабких» місць. Під «слабким» місцем, яке називають перетином, розуміють такий набір елементів, одночасна непрацездатність яких призводить до непрацездатності усієї системи. Завдання аналізу полягає у визначенні мінімальної множини таких перетинів, їх складу та ймовірнісних показників. Для системи із загальним заміщувальним резервуванням існує явище, яке полягає у тому, що у результаті відмови одного із елементів основної підсистеми, навантаження решти елементів основної підсистеми, а також навантаження елементів резервної підсистеми, змінюється. Застосовуючи відомі у літературі підходи, адекватно урахувати вплив вказаного явища на ймовірнісні показники перетинів неможливо.

Отже, постає проблема розроблення математичної моделі надійності електротехнічної системи із загальним заміщувальним резервуванням для визначення ймовірнісних показників перетинів, яка враховуватиме зміну навантаження елементів. Ця проблема виникає під час забезпечення заданого рівня надійності електротехнічних систем, які застосовують в об’єктах підвищеної небезпеки.

Огляд літературних джерел

У сучасній науковій літературі виділяємо два основні напрями, пов’язані із вирішенням поставленої проблеми: логіко-ймовірнісний підхід та марковський аналіз. У роботі [1] перетини визначають на основі логіко-ймовірнісних перетворень. Недолік такого підходу полягає у тому, що він не здатний коректно враховувати динамічні явища, зокрема, зміну навантаження елементів системи. Другий напрям ґрунтується на марковському аналізі. Такий аналіз безпосередньо вручну виконувати недоцільно у наслідок його громіздкості. З цією метою необхідно формалізувати явища зміни навантаження на основі динамічних дерев відмов [2], розробити методи автоматизованої побудови простору станів [3], а також методи його розщеплення на фази [4]. Розщеплення простору станів повинно забезпечити адекватне врахування довільних розподілів та запам’ятовування передісторії елементів за навантаженням [5].

Задачі дослідження

- Формалізувати надійність системи із загальним заміщувальним резервуванням на основі динамічного дерева відмов.
- Побудувати модель станів і подій системи.
- Сформувати розщеплену однорідну марковську модель системи.
- Визначити ймовірнісні показники перетинів системи.

Виклад основного матеріалу

Динамічне дерево відмов системи. Система складена із трьох елементів (рис. 1): генератор G, перетворювач VD та акумуляторна батарея GB.

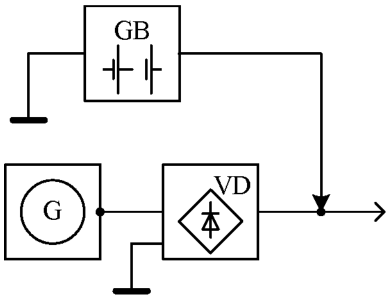


Рис. 1. Функціональна схема системи

Генератор G та перетворювач VD утворюють основну підсистему, а акумуляторна батарея GB – резервну. Функція системи полягає у забезпеченні електричною енергією споживачів, які під’єднані до її виходу. Надійність системи формалізовано динамічним деревом відмов, структура якого подана на рис. 2, а параметри наведені у табл. 1. Динамічне дерево відмов є математичною моделлю, яка описує умову непрацездатності системи та її надійнісну поведінку на основі блоків, що позначають логічні операції та операції відношення. Умову непрацездатності визначають дедуктивним методом, починаючи від вершини подій через оператори до базових подій.

Непрацездатність системи, позначена блоком «вершина подій 1» («Top Event 1»), полягає у тому, що система не здатна забезпечити енергією споживачів, під’єднаних до її виходу. Вважаємо, що така непрацездатність критична (табл. 1, рядок 1), тобто після її появи відновлення системи до уваги не береться. Такий стан системи настає, якщо одночасно непрацездатні основна та резервна підсистеми, що описано блоком «оператор 1» («Gate 1»), тип якого задано логічною операцією AND (табл. 1, рядок 2). Непрацездатність основної підсистеми настає, якщо непрацездатний хоча б один із двох її елементів, що описано блоком «оператор 2» («Gate 2»), тип якого задано логічною операцією OR (табл. 1, рядок 3). Непрацездатності генератора G та перетворювача VD, позначені блоками «базова подія 1» («Base Event 1») і «базова подія 2» («Base Event 2»), наступають у разі відмови таких елементів. Напрацювання до відмови генератора G розподілено за законом Вейбулла із параметрами $\alpha = 10\,000$ год. та $\beta = 1{,}3$ (табл. 1, рядки 4–6); а перетворювача VD – із параметрами $\alpha = 11\,000$ год. та $\beta = 1{,}1$ (табл. 1, рядки 8–10). Непрацездатність резервної підсистеми, яку позначено блоком «базова подія 3» («Base Event 3»), настає у разі відмови або розряду акумуляторної батареї GB. Вважаємо, що напрацювання до такої події розподілено так само за законом Вейбулла із параметрами $\alpha = 5\,000$ год. та $\beta = 1{,}2$ (табл. 1, рядки 12–14).

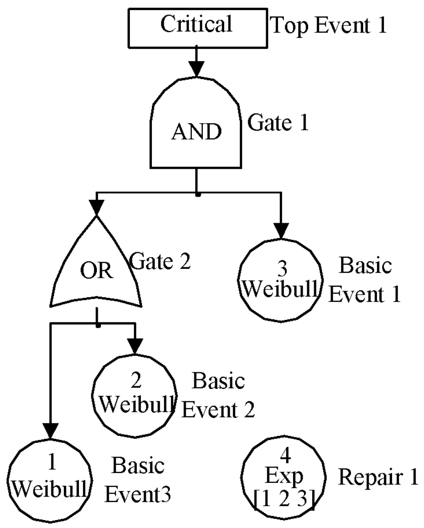


Рис. 2. Дерево відмов системи

Надійнісну поведінку системи за навантаженням задано на основі логічних функцій масштабування. Така функція f(**x**) визначає взаємозв’язок коефіцієнта масштабування заданого процесу зношування елемента системи залежно від логічного стану **x** (працездатність – непрацездатність) усіх елементів системи.

Для цієї моделі функції масштабування математично описують два пов’язані явища:

- відмикання працездатного елемента основної підсистеми, якщо інший елемент цієї підсистеми відмовив,

- вмикання резервної підсистеми, якщо основна відмовила, та вимикання резервної підсистеми, якщо основна відновлена.

Таблиця 1

Параметри блоків дерева відмов системи

№	Назва блока	Назва параметра	Значення параметра
1	Вершина подій 1	Критичність	1
2	Оператор 1	Тип	AND
3	Оператор 2	Тип	OR
4	Базова подія 1	Порядковий номер	1
5		Тип розподілу	Weibull
6		Параметри розподілу	[10 000 1,3]
7		Функція масштабування	$f_1(\mathbf{x})$
8	Базова подія 2	Порядковий номер	2
9		Тип розподілу	Weibull
10		Параметри розподілу	[11 000 1,1]
11		Функція масштабування	$f_2(\mathbf{x})$
12	Базова подія 3	Порядковий номер	3
13		Тип розподілу	Weibull
14		Параметри розподілу	[5 000 1,2]
15		Функція масштабування	$f_3(\mathbf{x})$
16	Ремонтування 1	Порядковий номер	4
17		Тип розподілу	Exp
18		Параметри розподілу	[0,025]
19		Множина відновлення	[1 2 3]

Функцію масштабування для процесу зношування генератора G (табл. 1, рядок 7) задаємо виразом:

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & if \quad x_1 x_2, \\ 0, & else. \end{cases}$$

Якщо обидва елементи основної підсистеми працездатні, то коефіцієнт масштабування цього процесу становить 1, а в усіх решта випадках – 0.
Функцію масштабування для процесу зношування перетворювача VD (табл. 1, рядок 11) формуємо аналогічно до наведеної вище:

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & if \quad x_1 x_2, \\ 0, & else. \end{cases}$$

Функцію масштабування для процесу зношування акумуляторної батареї GB (табл. 1, рядок 15) складаємо так:

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & if \quad \overline{x_1 x_2} x_2, \\ 0, & else. \end{cases}$$

Якщо акумуляторна батарея GB працездатна, проте непрацездатний хоча б один із елементів основної підсистеми, тобто генератор G або перетворювач VD, то коефіцієнт масштабування становить 1, а в усіх решта випадках – 0.

Ремонтування системи, позначене блоком «ремонтування 1» («Repair 1»), розподілено за експоненціальним законом із параметром μ = 0,025 1/год. (табл. 1, рядки 16–18). Такий процес відновлює усі елементи, тому в його множину відновлення записуємо значення 1, 2 та 3 (табл. 1, рядок 19). Функцію масштабування для процесу ремонтування задавати в явному вигляді не треба, оскільки інформації про множину відновлення та про критичність вершини подій достатньо, щоб у подальшому сформувати її автоматично. Зауважимо, що хоча множина відновлення об’єднує

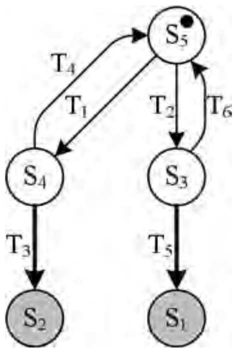


Рис. 3. Діаграма станів та переходів моделі станів та подій системи

акумуляторну батарею GB, проте за вказаної надійнісної поведінки її відмова завжди призводитиме до відмови усієї системи.

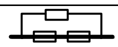
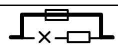
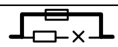
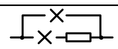
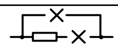
Модель станів та подій системи. На підставі наведеного вище динамічного дерева відмов системи із загальним заміщувальним резервуванням згідно із правилами [5, с. 67] складена модель станів та подій, структура якої подана на рис. 3, а параметри наведені у табл. 2. Модель станів та подій є математичним описом станів, в яких може перебувати система, та подій, які у ній можуть відбуватися, у проекційному зв'язку до процесів, що у ній відбуваються. Така модель є формалізованим описом діаграми станів та переходів системи.

У моделі станів та подій процес зношування генератора G позначено як P_1, перетворювача VD – P_2, акумуляторної батареї GB – P_3, а процес ремонтування – P_4. Система може перебувати у п'яти станах, із яких три працездатні – S_5–S_3, та два непрацездатні – S_2 і S_1. У системі може відбуватись шість подій, із яких дві відмови – T_3 і T_5, два пошкодження – T_1 і T_2, та два відновлення – T_4 і T_6.

Параметрами станів S_i є значення коефіцієнтів масштабування для процесів P_1–P_4, які подані у стовпцях $s_{i,1}$–$s_{i,4}$, та логічна належність стану до працездатності, яка подана у стовпці y_i. Параметрами подій T_k є назва процесу, завершення якого призвело до виконання події, яка подана у стовпці $t_{k,f}$; назва стану, в який переходить система у результаті виконання події, – у стовпці $t_{k,d}$, назва процесів, які перезапускаються у результаті виконання події, – у стовпці $t_{k,r}$; та логічна належність події до відмови – у стовпці z_k.

Таблиця 2

Параметри моделі станів та подій системи

№	Опис станів							Опис подій				
	Назва стану, S_i	Графічне подання стану	Коефіцієнти масштабування				y_i	Назва події, T_k	$t_{k,f}$	$t_{k,d}$	$t_{k,r}$	z_k
			$s_{i,1}$	$s_{i,2}$	$s_{i,3}$	$s_{i,4}$						
1	S_5		1	1	0	0	1	T_1	P_1	S_4	P_1	0
2								T_2	P_2	S_3	P_2	0
3	S_4		0	0	1	1	1	T_3	P_3	S_2	P_3	1
4								T_4	P_4	S_5	P_4	0
5	S_3		0	0	1	1	1	T_5	P_3	S_1	P_3	1
6								T_6	P_4	S_5	P_4	0
7	S_2		0	0	0	0	0	–	–	–	–	–
8	S_1		0	0	0	0	0	–	–	–	–	–

Марковська модель системи. Ґрунтуючись на моделі станів та подій системи із загальним заміщувальним резервуванням згідно із правилами [5, с. 78] сформована розщеплена однорідна марковська модель, структура якої подана на рис. 4, а параметри у виразі (1). Одержана модель містить 40 фаз та 48 переходів.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} & & \mathbf{A}_{\mathrm{T}_5} & & \\ \hdashline & & & \mathbf{A}_{\mathrm{T}_3} & \\ \hdashline & & \mathbf{A}_{\mathrm{S}_3} & & \mathbf{A}_{\mathrm{T}_2} \\ \hdashline & & & \mathbf{A}_{\mathrm{S}_4} & \mathbf{A}_{\mathrm{T}_1} \\ \hdashline & & \mathbf{A}_{\mathrm{T}_6} & \mathbf{A}_{\mathrm{T}_4} & \mathbf{A}_{\mathrm{S}_5} \end{array}\right], \quad \mathbf{p}(0) = \left[\begin{array}{c} \\ \hdashline \\ \hdashline \\ \hdashline \\ \hdashline \mathbf{p}_{\mathrm{S}_5}(0) \end{array}\right],$$
$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathbf{C}_{\mathrm{S}_1} & & & & \\ \hdashline & \mathbf{C}_{\mathrm{S}_2} & & & \end{array}\right]. \qquad (1)$$

Розщепленою однорідною марковською моделлю є множина матриць, які задають інтенсивності переходів між фазами **A**, початкові ймовірності фаз **p**(0), а також зв'язок **C** функцій ймовірності фаз із характеристиками надійності системи. Марковську модель подають системою рівнянь Колмогорова – Чепмена:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)=\mathbf{A}\,\mathbf{p}(t),$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\,\mathbf{p}(t).$$

де t – час; $\mathbf{p}(t)$ – вектор, що містить функції ймовірності фаз; $\mathbf{y}(t)$ – вектор, який містить функції ймовірності перетинів.

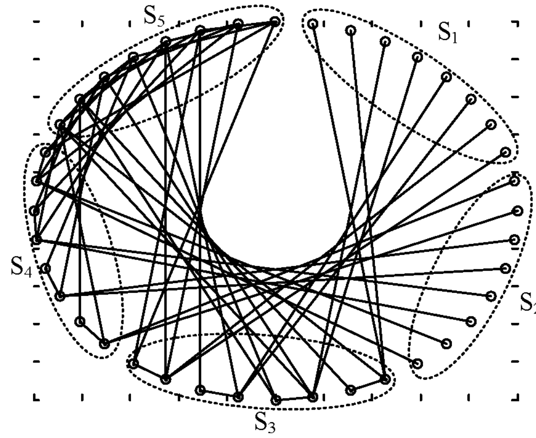


Рис. 4. Діаграми станів та переходів розщепленої однорідної марковської моделі системи

Компоненти марковської моделі системи формуємо на основі марковських моделей процесів. Параметри марковських моделей процесів визначаємо згідно із критерієм рівності першого і центрованого другого моментів фактичного розподілу процесу та його марковської моделі. Вважаємо, що для процесу P_1 параметри його марковської моделі становлять $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{p}_1(0), \mathbf{C}_1\}$, для P_2 – $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{p}_2(0), \mathbf{C}_2\}$, для P_3 – $\{\mathbf{A}_3, \mathbf{p}_3(0), \mathbf{C}_3\}$ та для P_4 – $\{\mathbf{A}_4, \mathbf{p}_4(0), \mathbf{C}_4\}$. Відповідно до вказаних параметрів для початкового працездатного стану S_5:

$$\mathbf{A}_{S_5}=\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_4+\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_4,$$
$$\mathbf{p}_{S_5}(0)=\mathbf{p}_1(0)\otimes\mathbf{p}_2(0)\otimes\mathbf{p}_3(0)\otimes\mathbf{p}_4(0).$$

де $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ – одиничні матриці, розмірність яких дорівнює розмірності матриць $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$. Для працездатних станів S_3 та S_4:

$$\mathbf{A}_{S_3}=\mathbf{A}_{S_4}=\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{A}_3\otimes\mathbf{E}_4+\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{A}_4.$$

Для непрацездатних станів S_1 та S_2:

$$\mathbf{C}_{S_1}=\mathbf{C}_{S_2}=\mathbf{I},$$

де **I** – одиничний рядок, розмірність якої дорівнює добутку розмірностей матриць $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$.

Для події T_1, спричиненої завершенням процесу P_1:

$$\mathbf{A}_{T_1}=\mathbf{p}_1\mathbf{C}_1\otimes\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_4.$$

Для події T_2, спричиненої завершенням процесу P_2:

$$\mathbf{A}_{T_2}=\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{p}_2\mathbf{C}_2\otimes\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{E}_4.$$

Для подій T_3 та T_5, спричинених завершенням процесу P_3:

$$\mathbf{A}_{T_3}=\mathbf{A}_{T_5}=\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{p}_3\mathbf{C}_3\otimes\mathbf{E}_4.$$

Для подій T_4 та T_6, спричинених завершенням процесу P_4:

$$\mathbf{A}_{T_4}=\mathbf{A}_{T_6}=\mathbf{E}_1\otimes\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{p}_4\mathbf{C}_5.$$

Характеристики надійності системи обчислено, застосовуючи матричну експоненту:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{p}(0),$$
$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}+\ldots$$

де **E** – одинична матриця, розмірність якої дорівнює розмірності матриці **A**.

Значення матричної експоненти визначено чисельним методом на основі апроксимації Паде.

Ймовірнісні показники перетинів. Застосовуючи характеристики надійності, обчислені за розщепленою однорідною марковською моделлю системи із загальним заміщувальним резервуванням, визначені ймовірнісні показники перетинів. Система має два непрацездатні стани S_1 та S_2, які відповідають перетинам (табл. 3).

Перетини посортовані за зменшенням їх відносної ваги у загальній ймовірності відмови системи, а під час подання їх вмісту перелічено лише непрацездатні елементи.

Таблиця 3

Ймовірнісні показники перетинів системи

№	Назва стану	Вміст перетину	Ймовірність	Відносна вага перетину
1	S_1	Непрацездатність перетворювача VD та акумуляторної батареї GB	$1{,}0117\ 10^{-3}$	58.43 %
2	S_2	Непрацездатність генератора G та акумуляторної батареї GB	$0{,}71978\ 10^{-3}$	41.57 %

Показники перетинів досліджуваної системи визначені для моменту часу t = 2 000 год. Як видно із табл. 3 для зменшення ймовірності відмови системи необхідно вжити заходів щодо підвищення надійності перетворювача VD та акумуляторної батареї GB, непрацездатність яких утворює перетин із відносною вагою 58,43 %.

Висновки

Розроблено математичну модель надійності електротехнічної системи із загальним заміщувальним резервуванням, призначену для визначення ймовірнісних показників перетинів. Формалізацію надійності системи виконано на основі динамічного дерева відмов, а визначення ймовірнісних показників – за розщепленою однорідною марковською моделлю. Така модель забезпечила адекватне урахування зміни навантаження основної та резервної підсистем у результаті непрацездатності окремих елементів, тривалість напрацювання до відмови яких розподілена за законом Вейбулла. За вказаною моделлю визначено ймовірнісні показники перетинів та показано, надійність яких елементів необхідно покращувати першочергово, щоб зменшити ймовірність відмови системи. Подальші дослідження скеровані на розроблення підходів щодо урахування зміни навантаження на ймовірнісні показники перетинів систем із загальним навантажувальним резервуванням.

1. Wei-Chang Yeh. A new algorithm for generating minimal cut sets in k-out-of-n networks / Wei-Chang Yeh // Reliability Engineering & System Safety. – 2006. – Vol. 91, No 1. – P. 36–43. 2. Codetta-Raiteri D. Integrating several formalisms in order to increase Fault Trees' modeling power / D. Codetta-Raiteri // Reliability Engineering & System Safety. – 2011. – Vol. 96, No 5. – P. 534–544. 3. Haitao Guo. Automatic creation of Markov models for reliability assessment of safety instrumented systems / Haitao Guo, Xianhui Yang // Reliability Engineering & System Safety. – 2008. – Vol. 93, No 6. – P. 829–837. 4. Juan Eloy Ruiz-Castro. Modelling a reliability system governed by discrete phase-type distributions / Juan Eloy Ruiz-Castro, Rafael Pérez-Ocón, Gemma Fernández-Villodre // Reliability Engineering & System Safety. – 2008. – Vol. 93, No 11. – P. 1650–1657. 5. Щербовських С. В. Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження: монографія / С. В. Щербовських. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 296 с.