

## ПРО ПОБУДОВУ МОДЕЛІ ЛОКАЛЬНОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

Розглянено методи представлення локального гравітаційного поля за допомогою неортогональних функцій. Проведено аналіз технік SCHA, ASHA і TOSCHA моделювання локального поля на “шапці” та сегменті сфери відповідно до густоти просторового розподілу вихідних даних. Знайдено наближену формулу для знаходження власних чисел диференціального рівняння приєднаних сферичних функцій  $P_n^m(\mu) = 0$  і порівняно її з іншими формулами.

**Ключові слова:** “шапковий” сферичний гармонічний аналіз (SCHA); власне число; задача Штурма–Ліувіля; гіпергеометричний ряд.

### Вступ

Традиційно побудова гравітаційних полів є однією із важливих складових основної задачі геодезії. Зазвичай, гравітаційне поле Землі представляють за допомогою розкладу у ряд за приєднаними сферичними функціями. У випадку, коли необхідно досягти кращої точності, для моделювання такого поля використовують розклад за еліпсоїдальними функціями.

Зараз існує багато моделей гравітаційних полів. Серед глобальних моделей слід виділити модель гравітаційного поля та його трансформант EGM2008 [Earth..., 2008], яку представляють у вигляді набору гармонічних коефіцієнтів до 2190 степеня/порядку.

### Постановка проблеми

“Глобальне” представлення гравітаційних полів за допомогою сферичних функцій є широко відомим. Проте таке представлення не є надійним, коли виміри розміщені тільки на певній частині земної поверхні. Глобальні сферичні гармоніки втрачають свою ортогональність у обмеженому регіоні і розв’язок стає нестабільним. У такому разі доцільно використовувати функції, ортогональні у межах цього регіону (проте неортогональні на всій сфері).

За локальний регіон можна прийняти “шапку” сфери або сегмент сфери (у двовимірному випадку).

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вперше апроксимацію локальних потенціальних полів за допомогою неортогональних функцій розглянули ще Томпсон і Тет [Kelvin, Tait, 1896]. Потім це питання частково висвітлювали Е.В. Гобсон [Hobson, 1931], В.Р. Сміт [Smythe, 1950] та інші. Проте цю техніку вперше реалізував Г.В. Хейнес у 1985–1988 роках для моделювання регіонального магнітного поля і вона отримала назву spherical cap harmonic analysis (SCHA) [Haines, 1985, 1988]. З того часу виникло багато нових технік, наприклад ASHA, TOSCHA, які є похідними від SCHA і ґрунтуються на штучній заміні довжини хвилі базових функцій відповідно до густоти вихідних даних у межах заданого регіону.

Під час використання вище наведених технік було побудовано локальні магнітні поля для таких держав як Італія, Австралія, Китай та ін [Stening et

al., 2008; Zhenchang, 2003]. Проте техніку SCHA застосовують не тільки для моделювання локального магнітного поля. Її також розвинено для випадку моделювання локального гравітаційного поля та його трансформант [Santis, Torta, 1997; Jiancheng et al, 1995; Hwang et al., 2012], а також даних супутникової альтиметрії [Hwang, Chen, 1997].

### Виклад основного матеріалу

Для моделювання локального потенціального поля  $V$  потрібно знайти базову систему функцій, ортогональних на локальному регіоні, наприклад, на “шапці” сфери. Для цього розв’яжемо рівняння Лапласа  $\Delta V=0$  у сферичних координатах методом розділення змінних – за допомогою добутку трьох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї сферичної координати:

$$V = f(r) \cdot g(\theta) \cdot h(\lambda), \quad (1)$$

де  $r, \theta, \lambda$  – сферичні координати.

Як відомо [Hofmann-Wellenhof, Moritz, 2005], функції (1) можна знайти з таких диференціальних рівнянь:

$$r^2 f''(r) + 2r \cdot f'(r) - n(n-1)f(r) = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \cdot g''(\theta) + \cos \theta \cdot g'(\theta) + \\ + \left[ n(n+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right] \cdot g(\theta) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$h''(\lambda) + m^2 \cdot h(\lambda) = 0. \quad (4)$$

Розв’язок (2)–(4) можна використовувати як базову систему функцій для представлення потенціалу, визначеного як на усій сфері, так і на будь-якій її частині. Із (2)–(4) видно, що  $n$  та  $m$  можуть бути цілими чи дійсними, реальними чи комплексними, навіть кватерніонами чи октавами. Проте для забезпечення ортогональності базової системи функцій потрібно знайти власні числа  $m^2$  та  $n(n+1)$  відповідно до частини сфери (або усєї сфери), на якій проводяться дослідження (наприклад, для усєї сфери  $n$  та  $m$  – цілі додатні числа).

Для знаходження  $n$  та  $m$  для сегменту сфери ( $\theta \leq \theta_0, r = 1$ ) використаємо задачу Штурма–Ліувіля [Churchill, 1963]. Для цього потрібно рівняння (2)–(4) перетворити до відповідного вигляду і накласти на них граничні умови. Легко бачити, що

розв'язок диференціальних рівнянь (2) і (4) буде аналогічний до розв'язку для всієї сфери, а саме

$$f(r) = r^n \text{ або } f(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (5)$$

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \text{ або } h(\lambda) = \sin m\lambda. \quad (6)$$

Рівняння (3) відповідно до задачі Штурма–Ліувіля набуде вигляду [Churchill, 1963; Hwang, Chen, 1997]

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{dP_{mn}(\mu)}{d\mu} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] P_{mn}(\mu) = 0, \quad (7)$$

де  $\mu = \cos \theta$ ,  $P_{mn}(\cos \theta) \equiv g(\theta)$ . Накладемо на (7) граничні умови. Перша гранична умова має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{nm}(r, 0, \lambda)}{\partial \theta} = 0 \quad m = 0 \\ \frac{\partial V_{nm}(r, 0, \lambda)}{\partial \theta} = 0 \quad m \neq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Проте при  $\theta_0 \neq \pi$  функція  $V$  в  $\theta_0$ , а також її похідна по  $\theta$  мусять бути довільними

$$V(r, \theta_0, \lambda) = f_1(r, \lambda); \quad (9)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = f_2(r, \lambda). \quad (10)$$

Отже, можна зробити висновок, що на “шапці” сфери існують дві системи ортогональних функцій. Назвемо їх Набір1 та Набір2. Очевидно, Набір1 підлягає граничним умовам (8), (9), а Набір2 – (8), (10).

Умова (9) виконується тільки у тому випадку, якщо власне число  $n_k(m)$  ( $k$  – індекс) набуває такого значення, що похідна від  $V$  по zenіту дорівнює нулю на границі сегменту [Haines, 1985]

$$\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)}{d\theta} = 0. \quad (11)$$

Своєю чергою, умова (10) виконується тоді, коли власне число  $n_k$  набуває такого значення, що функція  $V$  дорівнює нулю на границі сегменту

$$P_{n_k(m)m}(\cos \theta_0) = 0. \quad (12)$$

Важливо, що для функцій (11) ( $k-m$ ) – парне число, а для функцій (12) ( $k-m$ ) – непарне число.

Ортогональність функцій (11) і (12) відповідно впливає не лише з властивостей задачі Штурма–Ліувіля. Наприклад, після незначних математичних перетворень можна отримати вираз [Smythe, 1950; Hwang, Chen, 1997]

$$P_{n_k(m)m}(\mu) P_{n_j(m)m}(\mu) d\mu = \int_{\mu_0}^1 (1-\mu^2) \left( P_{n_k(m)m} \frac{dP_{n_j(m)m}}{d\mu} - P_{n_j(m)m} \frac{dP_{n_k(m)m}}{d\mu} \right) \Big|_{\mu_0}^1. \quad (13)$$

$$(n_k - n_j)(n_k + n_j + 1)$$

Із (13) видно, що функції (11) і (12) є ортогональні на сегменті сфери, а також можна ввести “Heis-

kanen and Moritz” норму, взявши із (13) границю  $n_k \rightarrow n_j$  і розв'язавши її за правилом Лопітала [Hofmann–Wellenhof, Moritz, 2005; Hwang, Chen, 1997].

Для програмування функцій (11) та (12) їх розкладають у гіпергеометричний ряд [Haines, 1988; Hwang, Chen, 1997]:

$$F(n, m, \mu_0) = 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} n\mu_0 F(n, m, \mu_0) - \\ - (n-m)F(n-1, m, \mu_0) = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$F(n, m, \mu) = F(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-\mu}{2}). \quad (16)$$

Так, будь-яку функцію на сегменті сфери можна розкласти в ряд

$$V(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{K_{\max}} \sum_{m=0}^k [\bar{a}_{km} \overline{R_{km}}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{km} \overline{S_{km}}(\theta, \lambda)], \quad (17)$$

де  $\overline{R_{km}}$ ,  $\overline{S_{km}}$  – повністю нормовані сферичні функції на сегменті сфери,  $\bar{a}_{km}$ ,  $\bar{b}_{km}$  – коефіцієнти Фур'є,  $K_{\max}$  – максимальний порядок розкладу.

Очевидно, знайти коефіцієнти у (17) можна тільки способом найменших квадратів. Якщо ж є змога використати тільки одну систему функцій, наприклад, Набір1, тоді коефіцієнти можна знайти як

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{a}_{km} \\ \bar{b}_{km} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2\pi(1-\cos \theta_0)} \times \int \int_{\sigma} V(\theta, \lambda) \left\{ \begin{aligned} \overline{R_{km}}(\theta, \lambda) \\ \overline{S_{km}}(\theta, \lambda) \end{aligned} \right\} d\sigma, \quad k-m = \text{even}. \quad (18)$$

### ASHA

Оскільки функції (15) і (16) описуються нескінченним гіпергеометричним рядом, програмувати їх досить складно, особливо, коли є необхідність досягнення високого порядку  $K_{\max}$ . Тому виникає потреба знаходження базових функцій, які були б простіші за функції Лежандра дійсного порядку. В принципі, можна використати звичайні сферичні функції [Santis, 1992]. Як добре відомо, вони формують систему ортогональних функцій на відріжку  $0 \leq \theta \leq \pi$ , тим не менше вони можуть бути використані як дві системи ортогональних функцій на відріжку  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  для представлення довільної функції на половині сфери (рис. 1)

Розглянемо перехід від системи координат “шапки” сфери  $(r, \theta, \lambda)$  до нової системи координат на половині сфери  $(r', \theta', \lambda')$ :

$$r' = r, \quad \lambda' = \lambda, \quad \theta' = s \cdot \theta, \quad (19)$$

де  $s = \frac{\pi}{2\theta_0}$ ,  $\theta_0$  – половинний кут шапки сфери. Із

(19) видно, що змінилося тільки рівняння по  $\theta$ .

Проте очевидно, що у рівнянні (3) неможливо перейти від  $\sin \theta$  до  $\sin \theta'$ . Проте у випадку, коли сферична “шапка” є невелика, можна використати заміну  $\sin \theta \cong \theta$  [Santis, 1992]. Таке представлення дає дуже хороше наближення, краще за 99 % при  $\theta_0 \leq 14^\circ$ , і 98 % при  $\theta_0 \leq 20^\circ$ .

Так, після переходу  $\sin \theta \rightarrow \theta$  і деяких перетворень диференціальне рівняння (3) набуде вигляду

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \cdot \frac{dP}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\theta^2} \right] P = 0, \quad (20)$$

а після переходу  $\theta \rightarrow \theta'$

$$\frac{d^2 P}{d\theta'^2} + \frac{1}{\theta'} \cdot \frac{dP}{d\theta'} + \left[ n(n+1)/s^2 - \frac{m^2}{\theta'^2} \right] P = 0. \quad (21)$$

Оскільки для половини сфери  $n_k = k$ , то із (21) можна записати

$$k(k+1) = n(n+1)/s^2. \quad (22)$$

Із (22) легко знаходимо наближений вираз для власних чисел

$$n_k = \sqrt{s^2 k(k+1) + 0.25} - 0.5. \quad (23)$$

Використовуючи вираз (23), можна знаходити приблизні значення власних чисел  $n_k$ . Також потрібно взяти до уваги, що у формулі (23)  $n_k$  залежать від  $k$  і не залежать від  $m$ .

Така техніка отримала назву ASHA (Adjusted Spherical Harmonic Analysis). Для її практичної реалізації треба виконати такий алгоритм:

1) обертання сферичних координат (щоб вихідні дані потрапили на сферичну “шапку”);

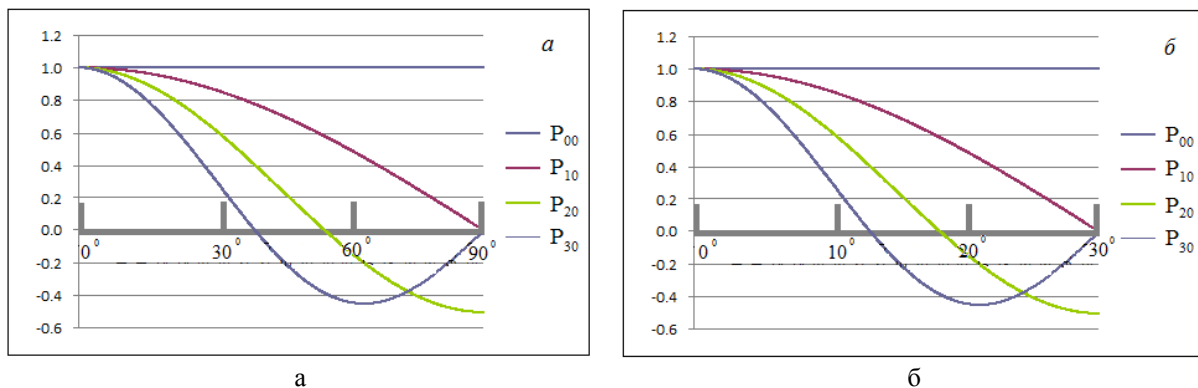
2) проектування вихідних даних із сферичної “шапки” на половину сфери;

3) застосування SH аналізу, який використовується у моделюванні на всій поверхні сфери, з відповідною оцінкою коефіцієнтів Гауса;

4) повернення до початкової системи координат (з половини сфери до сферичної “шапки”, і, остаточно, до локальної системи координат).

### TOSCA

Техніка SCHA зручна для моделювання регіональних полів, оскільки вона передбачає використання функцій з коротшою довжиною хвилі, аніж у звичайних сферичних функцій. Проте у деяких випадках вихідні дані розміщені неоднорідно. Здебільшого це стосується регіонів, форма яких відрізняється від сегмента сфери. Тоді вихідні дані міститимуться тільки всередині регіону. За таких обставин необхідно використовувати дещо іншу техніку. Розглянемо випадок, коли вихідні дані дуже густо розміщені у центрі досліджуваного регіону, проте їх густина зменшується в міру наближення до країв. У такому разі треба перемістити початок системи координат з центру Землі до її поверхні. Тоді поверхня Землі не буде на рівній відстані до початку координат. Такий метод одержав назву TOSCA (Translated origin spherical cap harmonic analysis) на честь дивовижної та прекрасної опери Пуччіні 1900 року [Santis, 1991].



**Рис. 1.** Функції Лежандра  $P_{km}$  на половині сфери (а) і на “шапці” сфери (б)

для  $\theta_0 = 30^\circ$  і  $m=0$ . Для випадку (а)  $n_k = k$ , для випадку (б)

$$n_0 = 0.00, n_1 = 4.08, n_2 = 6.84, n_3 = 10.04.$$

Отже, TOSCA діє наче фільтр і представляє дані у дуже дрібних деталях (малі довжини хвиль) у центрі регіону, і згладжує їх (великі довжини хвиль) на шляху до границі регіону.

Оригінальний підхід TOSCA полягає у використанні SCHA у новій референційній системі зі зміщеним центром вертикально вздовж радіуса з центру Землі. Формули переходу між цими системами координат мають вигляд

$$\begin{aligned} X_1 &= X; Y_1 = Y; \\ Z_1 &= Z - Z_0, \end{aligned} \quad (24)$$

де  $X, Y, Z$  – координати у сферичній системі (після обертання вихідних даних на “шапку” сфери);  $X_1, Y_1, Z_1$  – координати у новій зміщеній референційній системі. Очевидно, перехід (24) у сферичних координатах виглядатиме так:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta}; \\ \lambda_1 &= \lambda; \\ \theta_1 &= \arcsin\left(r \sin \frac{\theta}{r_1}\right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Треба зазначити, що нові функції Лежандра, обчислені аналогічно як у СНА, але у новій системі координат, залишаються розв'язком рівняння Лапласа, оскільки вони не змінюються при зміщенні референційної системи, для якої джерела поля залишаються внутрішніми.

**Власні числа  $n_k$  сферичних функцій**

Для знаходження власних чисел функцій (11) або (12)  $n_k$  існують вирази в замкненій формі [Macdonald, 1900; Pal, 1919], проте вони дуже громіздкі. Так, у [Haines, 1985] запропоновано шукати  $n_k$  безпосередньо із (14) та (15) за допомогою ітерації Мюллера. У [Haines, 1988] подається наближена формула для знаходження  $n_k$ :

$$n_k \cong s(k + 0.5) - 0.5. \quad (26)$$

У [Santis, 1992] рекомендується використовувати формулу (23).

Проте формули (23) або (26) можна використовувати тільки при  $m = 0$ . Так, знайдемо наближений вираз для знаходження власних чисел  $n_k$ , у який входить  $m$ . Для Набір1 з використанням формули (3) отримаємо  $g'(\theta_0) =$

$$\frac{\sin \theta_0 \cdot g''(\theta_0) + \left[ n(n+1) \sin \theta_0 - \frac{m^2}{\sin \theta_0} \right] \cdot g(\theta_0)}{\cos \theta_0} = 0. \quad (27)$$

Накладемо додаткову умову  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$  і введемо заміну

$$n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0} = r^2. \quad (28)$$

Тоді (27) переписється як

$$g''(\theta_0) + r^2 \cdot g(\theta_0) = 0. \quad (29)$$

Рішення (29) є таким [6]:

$$g(\theta_0) = a_1 \cos r\theta_0 + a_2 \sin r\theta_0, \quad (30)$$

де  $a_1$  і  $a_2$  – деякі константи. Візьмемо похідну від (30) і прирівняємо її до нуля:

$$g'(\theta_0) = -a_1 r \sin r\theta_0 + a_2 r \cos r\theta_0 = 0. \quad (31)$$

Введемо заміну  $a = \frac{a_2}{a_1}$ . Як видно із (31), константи  $a$  можна виразити як

$$a = \operatorname{tg}(r\theta_0). \quad (32)$$

Для знаходження  $a$  вважатимемо, що в (32)  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , а  $n = k$ . Тоді остаточно отримаємо

$$a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{k(k+1) - m^2}\right). \quad (33)$$

Як відомо, вираз (31) можна подати в такому вигляді [Смирнов, 1954]:

$$g(\theta_0) = C \sin(r\theta_0 + \varphi) = 0, \quad (34)$$

де  $C = \sqrt{a^2 + 1}$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2} \sqrt{k(k+1) - m^2}$ .

Оскільки завжди  $C > 0$ , розв'язок (34) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\sqrt{n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0}} \cdot \theta_0 - \\ &-\frac{\pi}{2} \sqrt{k(k+1) - m^2} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Ввівши заміну

$$s^2 [k(k+1) - m^2] + \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0} = D, \quad (36)$$

після незначних математичних перетворень остаточно одержимо

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4D}}{2}. \quad (37)$$

Очевидно,  $n_2 = -n_1 - 1$ . При  $m = 0$  формула (37) переходить у (23).

У таблиці порівняно власні числа  $n_k$ , розраховані за різними формулами для  $m = 0$  і  $\theta_0 = 50^\circ$ .

**Порівняння власних чисел  $n_k$ , одержаних за різними формулами**

$k$	$n_k$ (ітерація Мюллера)	$n_k$ (формула 26)	$n_k$ (формула 37)
0	0,00	0,40	0,00
1	2,24	2,20	2,09
2	3,92	4,00	3,94
3	5,82	5,80	5,76
4	7,56	7,60	7,57
5	9,41	9,40	9,37
6	11,17	11,20	11,18
7	13,01	13,00	12,98
8	14,78	14,80	14,78

**Висновки**

У цій роботі проведено аналіз методів побудови локальних потенціальних полів за допомогою базових неортогональних функцій, що дає змогу вибрати оптимальну техніку для побудови локального гравітаційного поля відповідно до інформації про кількість та розподіл густини вихідних даних. Отримано наближену формулу для зна-

ходження власних чисел приєднаних сферичних функцій цілого степеня і дійсного порядку.

### Література

- Смирнов В. Курс высшей математики. Том II. – М.: Наука, 1954. – 627 с.
- Churchill R.V. Fourier Series and Boundary Value Problems, 2nd ed. – New York: McGraw-Hill, 1963.
- De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field // Geophys. Res. Lett. – 1992. – 19, – P. 1065–1067.
- De Santis A. Translated origin spherical cap harmonic analysis // Geophys. J. Int. – 1991. – 106. – P. 253–263.
- De Santis A., Torta J.M. Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation // J. of Geodesy – 1997. – 71. – P. 526–532.
- Earth Gravitational Model 2008 (EGM 2008). – <http://earthinfo.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/>
- Haines G.V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields // Comput. Geosci. – 1988. – 14, – P. 413–447.
- Haines G.V. Spherical cap harmonic analysis // J. Geophys. Res. – 1985. – 90, – P. 2583–2591.
- Hobson E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. – New York: Cambridge Univ. Press, 1931.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. Physical Geodesy. Wien New York: Springer Science + Business Media, 2005. – 403 p.
- Hwang C., Chen S. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1 // Geophys. J. Int. – 1997. – 129, – P. 450–460.
- Jiancheng L., Dingbo C., Jinsheng N. Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation // Manuscr. Geod. – 1995. – 20. – P. 265–277.
- Jong Sun Hwang, Hyun-Chul Han, Shin-Chan Han, Kyong-O Kim, Jin-Ho Kim, Moo Hee Kang, Chang Hwan Kim. Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis // J. of Geodynamics – 2012. – 53. – P. 27–33.
- Kelvin L., Tait P. Treatise on natural philosophy. – New York: Cambridge Univ. Press., 1896. – 536 p.
- Macdonald H.M. Zeroes of the spherical harmonic  $P_n^m(\mu)$  considered as a function of  $n$  // Proc. London Math. Soc. – 1900. – 31. – P. 264–278.
- Pal B. On the numerical calculation of the roots of the equation  $P_n^m(\mu) = 0$  and  $(d/d\mu)P_n^m(\mu) = 0$  regarded as equations in  $n$  // Bull. Calcutta Math. Soc. – 1919. – 9. – P. 85–95.
- Smythe W.R. Static and Dynamic Electricity, 2nd ed. – New York: McGraw-Hill, 1950. – 616 p.
- Stening R.J., Reztsova T., Ivers D., Turner J. and Winch D.E. Spherical cap harmonic analysis of magnetic variations data from mainland Australia // Earth Planets Space – 2008. – 60. – P. 1177–1186.
- Zhenchang An. Spherical cap harmonic analysis of the geomagnetic field and its secular variation in China for 2000 // Chinese J. of Geophysics – 2003. – 46. – P. 85–91.

## О ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Б.Б. Джуман

Рассмотрены методы представления локального гравитационного поля с помощью неортогональных функций. Проведен анализ техник SCHA, ASHA и TOSCHA моделирования локального поля на “шапке” и сегменте сферы в соответствии с плотностью пространственного распределения исходных данных. Найдена приближенная формула для нахождения собственных чисел дифференциального уравнения присоединенных сферических функций  $P_n^m(\mu) = 0$  и проведено ее сравнение с другими формулами.

**Ключевые слова:** “шапковый” сферический гармонический анализ (SCHA); собственное число; задача Штурма–Лиувилля; гипергеометрический ряд.

## ON THE CONSTRUCTION OF LOCAL GRAVITATIONAL FIELD MODEL

B.B. Dzhuman

Methods of local gravitational field presentation using nonorthogonal functions are considered. Analysis of SCHA, ASHA and TOSCHA techniques of local field modeling on spherical cap and spherical segment is accomplished according to density distribution of initial data. Approximate formula for finding eigenvalues of differential equation of associated spherical functions  $P_n^m(\mu) = 0$  is found and compared with other formulas.

**Key words:** spherical cap harmonic analysis (SCHA); eigenvalue; Sturm-Liouville problem; hypergeometric series.