УДК 519.2:621.391

С.В. Заболотній
Черкаський державний технологічний університет
кафедра радіотехніки

РЕКУРЕНТНЕ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ФОРМУВАННЯ СЛАР ДЛЯ АДАПТАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ УЗГОДЖЕНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФІЛЬТРІВ

Розглянуто рекурентне статистичне оцінювання точності формування коефіцієнтів систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що застосовуються для знаходження адаптивних значень параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів.

Ключові слова: рекурентне статистичне оцінювання, поліноміальні фільтри.

In this paper the recurrent statistical evaluation of precision of forming of coefficients of the systems of linear algebraic equalizations, applied for finding of adaptive values of parameters of the matched polynomial filters is considered.

Key words: recurrent statistical evaluation, polynomial filters.

Вступ

Класичний підхід до побудови оптимальних методів опрацювання в негауссових умовах полягає у використанні нелінійних перетворювачів (фільтрів), структура та алгоритм роботи яких визначається видом та параметрами густин розподілу ймовірностей (ГРЙ) сигналів і завад. Проте на практиці типовою є ситуація повної або часткової апріорної невизначеності щодо реальних ГРЙ, а тому виникає необхідність побудови адаптивних процедур, реалізація яких потребує розв’язання достатньо складних задач, пов’язаних із визначенням типу ГРЙ та знаходженням оцінок їх параметрів [1].

Одним із компромісних варіантів нелінійного опрацювання є підхід, оснований на застосуванні апарату стохастичних поліномів, який запропонував Ю.П. Кунченко [2]. Його ефективність, з погляду реалізаційної простоти, базується на тому факті, що поліном є лінійною комбінацією деяких функціональних перетворень, а як математичну модель сигналів і завад використовують опис у вигляді математичних сподівань базисних функцій. Зокрема, якщо як базис використати степеневі функції, то таким описом буде послідовність моментів або кумулянтів. Оскільки такий спосіб опису є неповним, то результуючі поліноміальні методи опрацювання сигналів потенційно поступаються оптимальним. Проте їх точність, загалом, переважає лінійні методи і зростатиме з підвищенням степеня стохастичного полінома. Ще однією важливою перевагою поліноміального підходу є суттєве алгоритмічне спрощення реалізації адаптивних режимів роботи, оскільки розв’язання задачі знаходження лінійних оцінок (середніх значень) скінченної кількості базисних перетворень, зокрема моментів або кумулянтів, є значно простішою порівняно із оцінюванням параметрів ГРЙ.

У роботі [3], на основі розкладу в просторі з порідним елементом (просторі Кунченко), запропонована процедура узгодженої поліноміальної фільтрації, основана на властивості стохастичних поліномів зменшувати дисперсію статистичних даних. У наступних роботах розглянуто можливість застосування таких фільтрів для розв’язання задач, пов’язаних із виявленням [4] і розпізнаванням [5] сигналів. Результати імітаційного моделювання [6] підтверджують можливість застосування стохастичних степеневих поліномів для побудови адаптивних систем, здатних функціонувати в умовах апріорної невизначеності щодо ймовірнісних характеристик завад. Показано, що процедура адаптації зводиться до пошуку оцінок послідовності початкових моментів та необхідності розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), розв’язком яких є оптимальні значення параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів.

Метою роботи є розроблення методики рекурентного оцінювання точності формування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які застосовуються для адаптивного відшукання параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів.

Постановка задачі

Нехай фонові завади в деякому інформаційному каналі описуються моделлю адитивного білого негауссового шуму $x(t)$. За дискретного способу опрацювання послідовність відліків завади $x_n = x(nT)$, де T – період дискретизації, можна трактувати як однаково розподілені елементи вибірки із випадкової величини, яку називають порідною [3]. Застосуємо до послідовності x_n поліноміальне перетворення виду:

$$g_S(x_n) = k_0 + \sum_{i=2}^{S} k_i (x_n)^i . \quad (1)$$

Якщо вектор $\mathbf{K}$ коефіцієнтів k_i, $i = \overrightarrow{2,S}$ степеневого стохастичного полінома (1) знаходити із розв’язання СЛАР:

$$\mathbf{KF} = \mathbf{B}, \quad (2)$$

де $\mathbf{F}$ – квадратна матриця розміру $(S-1)\times(S-1)$, елементами якої є центровані кореляти

$$F_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_i \alpha_j \ , \ i,j = \overrightarrow{2,S} , \quad (3)$$

$\mathbf{B}$ – вектор-стовпець розміру $S-1$, що складається із елементів $F_{1,i}$, $i = \overrightarrow{2,S}$, k_0 – нормуючий коефіцієнт, що формується за співвідношенням:

$$k_0 = \alpha_1 - \mathbf{KA} ,$$

де $\mathbf{A}$ – вектор-стовпець розміру $S-1$, що складається із початкових моментів α_i, $i = \overrightarrow{2,S}$, порідної випадкової величини, то перетворення (1) можна трактувати як узгоджену поліноміальну фільтрацію випадкової послідовності x_n в базисі степеневих перетворень [3].

У цій ситуації, під терміном «узгодження» розуміємо забезпечення мінімально можливої (за відповідного степеня полінома S) величини дисперсії випадкової послідовності $y_n^{(S)}$, що формується як різниця між відліками порідної послідовності x_n та її поліноміальним перетвореннями виду (1), тобто

$$y_n^{(S)} = x_n - g_s(x_n) = \sum_{i=1}^{S} h_i \left[(x_n)^i - \alpha_i \right], \quad (4)$$

де для узагальнення виразу (4) введено позначення $h_1 = 1$, $h_i = -k_i$, $i = \overrightarrow{2,S}$.

Узгоджену поліноміальну фільтрацію можна ефективно застосувати для розв’язання ряду прикладних статистичних задач, зокрема, розпізнавання детермінованих сигналів [5] або виявлення слабких сигналів невідомої форми [6] на фоні негауссових завад. Необхідним фактором синтезу алгоритмів виду (4) є наявність ймовірнісного опису завади (порідної випадкової величини) у вигляді скінченної послідовності її початкових моментів. За апріорної відсутності подібної інформації необхідно здійснити навчання системи, що можна реалізувати за наявності навчальної вибірки, яка містить послідовність відліків лише фонової завади. При цьому виникає задача оцінки точності знаходження «узгоджених» адаптивних параметрів поліноміальних фільтрів (коефіцієнтів стохастичних поліномів) залежно від довжини навчальної вибірки.

Результати дослідження

1. Особливості розв’язання СЛАР при неточно заданих даних

Відповідно до постановки задачі, процедура адаптивного пошуку узгоджених значень параметрів поліноміальних степеневих фільтрів порядку S полягає у розв’язанні системи $S-1$

СЛАР виду (2). При цьому виникає проблема, пов'язана із неточністю формування значень коефіцієнтів системи рівнянь, оскільки в процесі навчання їх отримують за допомогою статистичного оцінювання і при обмеженій вибірці вони є випадковими величинами, які характеризуються певною точністю (середньоквадратичним відхиленням).

Відомо, що застосування в подібних ситуаціях прямих методів розв'язання (Крамера, Гаусса тощо) потребує додаткових спеціальних досліджень, пов'язаних із визначенням ступеня обумовленості матриць коефіцієнтів СЛАР, що дозволяє оцінити результуючу точність їх розв'язання [7]. Не менш важливим є цей фактор і у разі застосування ітераційних методів (Якобі, Зейделя тощо), оскільки аналіз величини неточності заданих даних дозволяє оцінити оптимальне значення максимальної кількості ітерацій, необхідне для забезпечення узгодження початкових похибок і результуючої точності кінцевих розв'язків систем [8]. В обох випадках критерії оцінки точності формування СЛАР базуються на визначенні відносних величин сукупності похибок виду:

$$\delta F = \frac{\|\Delta \mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|}, \ \delta B = \frac{\|\Delta \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|},$$

де $\|\cdot\|$ – оператор, що визначає евклідову норму відповідної матриці або вектора.

При нашій постановці задачі елементами матриці $\Delta\mathbf{F}$ та вектора $\Delta\mathbf{B}$ є середньоквадратичні відхилення статистичних оцінок відповідних центрованих корелянтів

$$\Delta F_{i,j} = \sqrt{D\left\{\hat{F}_{i,j}\right\}} = \sqrt{E\left\{\hat{F}_{i,j} - \left\{\hat{F}_{i,j}\right\}\right\}^2}, \tag{5}$$

де $E\{\cdot\}$ і $D\{\cdot\}$ – оператори, що визначають математичне сподівання та дисперсію відповідних оцінок.

2. Рекурентне статистичне усереднення

Відповідно до співвідношення (3), оціночні значення центрованих корелянтів $\hat{F}_{i,j}$, необхідних для формування СЛАР, можна визначити на основі оцінок початкових моментів $\hat{\alpha}_i$, які достатньо просто знайти усередненням степеневих перетворень N вибіркових даних, тобто:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n\right)^i . \tag{6}$$

Оцінки виду (6) є слушними та асимптотично незміщеними [9]. І хоча величина дисперсії таких оцінок може відрізнятися від ефективних значень, проте їх основною перевагою є простота та відсутність обмежень на наявність будь-якої додаткової апріорної інформації.

У випадку, коли для навчання доступна достатньо велика послідовність (навчальна вибірка), і передбачається, що її ймовірнісні характеристики надалі будуть незмінними, то для формування оцінок моментів можна використати рекурентну алгоритмічну процедуру виду:

$$\hat{\alpha}_{i,n} = \frac{1}{n}\left[(n-1)\hat{\alpha}_{i,n-1} + \left(x_n\right)^i\right]. \tag{7}$$

Очевидно, що, з обчислювального погляду, спосіб оцінювання (7) порівняно із (6) є значно ефективнішим, оскільки суттєво зменшує обсяг пам'яті, необхідний для збереження проміжних даних. Крім того, застосування рекурентного оцінювання надає можливості для визначення необхідного обсягу вибірки в процесі навчання за рахунок поточного контролю точності отримуваних оцінок [10].

На рис. 1, як приклад функціонування рекурентної процедури (7), подано результати статистичного оцінювання послідовності перших шести початкових моментів для реалізації випадкової величини із гамма-розподілом.

Аналіз наведених графіків та інших отриманих експериментальних результатів статистичного оцінювання моментів випадкових величин з різними розподілами (рівномірним, гауссовим, логнормальним, експоненційним, бігауссовим тощо) вказує на загальну тенденцію зростання відносної величини дисперсій оцінок моментів зі збільшенням їх порядку. Тому збільшення степеня стохастичного полінома, який застосовується для синтезу поліноміальних фільтрів, потребує не лише ускладнення самого алгоритму, але й збільшення обсягу навчальної вибірки N, необхідної для адаптації параметрів, оскільки, як відомо, дисперсія оцінок (6) і (7) є величиною, обернено пропорційною до N [9].

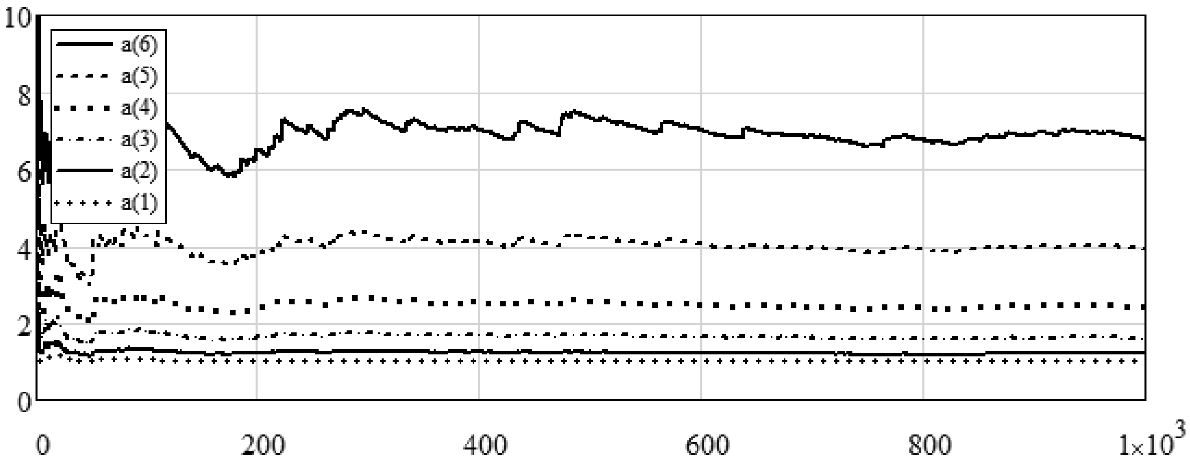

Рис. 1. Рекурентні оцінки початкових моментів

3. Ковзне оцінювання точності

Враховуючи зазначені вище статистичні властивості оцінок (6), можемо трактувати послідовність оцінок $\hat{\vartheta}_n$ деякого параметра ϑ (початкового моменту або центрованого корелянта), що отримується в результаті застосування рекурентної процедури (7), як нестаціонарний дискретний випадковий процес, який характеризується математичним сподіванням, що дорівнює істинному значенню оцінюваного параметра та дисперсією, яка поступово (з кожним новим вибірковим значенням) лінійно зменшується.

Для того, щоб реалізувати поточний контроль точності оцінок значень параметрів, виконаємо процедуру ковзного віконного згладжування типу:

$$\overline{z_n} = \frac{1}{M}\left[\overline{z_{n-1}} + z_n - z_{n-M}\right], \tag{8}$$

де $\overline{z_n}$ – поточне усереднення попередніх M значень деякої випадкової послідовності z_n.

Користуючись (8), можемо наближено визначати величину середньоквадратичних похибок оцінювання параметра ϑ, формуючи послідовність:

$$\Delta\hat{\vartheta}_n = \sqrt{\overline{\left(\hat{\vartheta}_n - \overline{\hat{\vartheta}_n}\right)^2}}\,. \tag{9}$$

Послідовності виду (9) є випадковими величинами, дисперсія яких обернено пропорційна до ширини ковзного вікна M. Врахувуючи властивості ковзного усереднення, необхідно зазначити, що поточне n-те значення послідовності $\Delta\hat{\vartheta}_n$ відображає оцінку точності параметра ϑ, характерну для середини ковзного вікна, тобто точки $n - M/2$. Тому збільшення ширини вікна M, крім покращення якості усереднення, може призвести до надмірного зростання «інерційності» процедури адаптації, яке проявляється у надлишковості обсягу навчальної вибірки.

Як приклад застосування оцінок (9), на рис. 2 наведена залежність (лінія «norma(dF)»), що демонструє динаміку зменшення відносної похибки рекурентного формування матриці коефіцієнтів $\mathbf{F}$ СЛАР для узгодження параметрів поліноміального фільтра зі степенем $S = 4$. Наведені графіки отримані для вхідної випадкової послідовності із гамма-розподілом та із застосуванням ковзного вікна шириною $M = 100$.

Оскільки обчислення норми матриць є достатньо складною і ресурсомісткою задачею, то для поточного контролю точності можна використати оціночні величини відносних похибок рекурентного визначення лише тих параметрів матриці $\mathbf{F}$ та вектора $\mathbf{B}$, які дають наістотніший внесок у величину їх норми. Про це свідчать графіки відносних похибок рекурентного оцінювання корелянта $F_{S,S}$ (лінія «dF(S,S)») та початкового моменту α_{2S} (лінія «da(2S)»), зображені на рис.2, що демонструють спільність характеру та мінімальну розбіжність між цими залежностями, яка нівелюється зі зростанням обсягу навчальної вибірки. Аналогічно, замість оцінок відносної точності визначення норми вектора $\mathbf{B}$, можна використати оцінки центрованого корелянта $F_{1,S}$ або початкового моменту α_{S+1}.

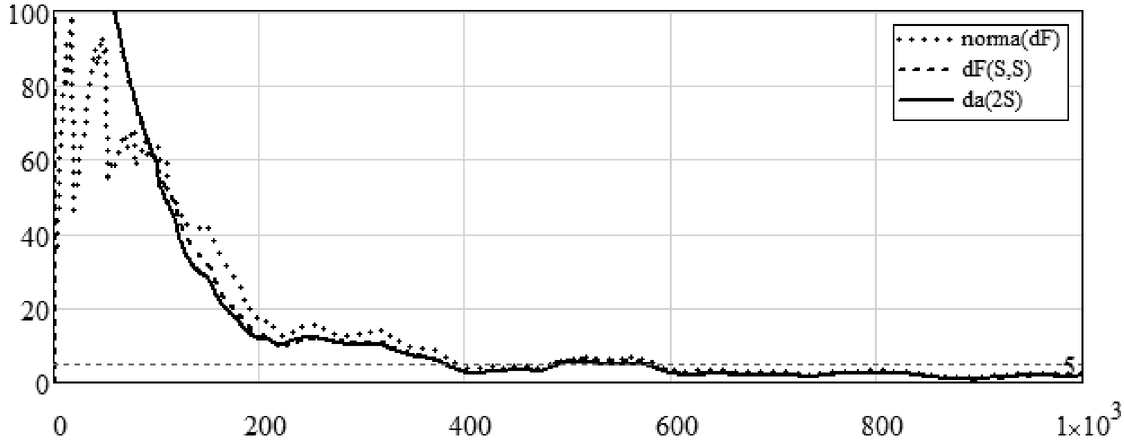

Рис. 2. Відносні похибки рекурентного оцінювання (у відсотках)

Аналіз наведеного прикладу показує, що якщо задатися відносною точністю на рівні 5 %, то процес рекурентного оцінювання можна зупиняти приблизно після отримання 600 відліків навчальної послідовності. Зазначимо, що математично коректні правила точного визначення моменту зупинки подібних експериментальних досліджень відомі достатньо давно й активно застосовуються в експрес-аналізі випадкових процесів [10]. Вони базуються на контролі різниць між поточними рекурентними оцінками параметрів і використовують елементи теорії серії успіхів [11].

Висновки

Наведена евристична методика визначення похибок формування коефіцієнтів систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які застосовуються для адаптивного пошуку узгоджених значень параметрів поліноміальних фільтрів. Отримана методика основана на рекурентному статистичному оцінюванні початкових моментів і центрованих корелянтів випадкових послідовностей та дає змогу реалізовувати поточний контроль необхідного обсягу навчальної вибірки за рахунок аналізу точності отримуваних оцінок у вигляді ковзного віконного усереднення їх середньоквадратичних відхилень.

1. Шелухин О.И. Негауссовские процессы в радиотехнике. – М.: Радио и связь, 1998. – 310 с. 2. Кунченко Ю.П. Стохастические полиномы. – К.: Наук. думка, 2006. – 275 с. 3. Заболотній С.В. Зменшення дисперсії випадкових послідовностей на основі нелінійної поліноміальної узгодженої фільтрації методом ковзного вікна // Вісник ЧДТУ. – 2008. – № 2. – С.14–19. 4. Заболотній С.В., Коваль В.В., Салипа С.В. Виявлення відеосигналів із застосуванням нелінійних дискретних фільтрів з постійними коефіцієнтами // Електроніка та системи управління. – 2008. – № 3. – С.77–83. 5. Заболотній С.В. Синтез поліноміальних алгоритмів розпізнавання детермінованих сигналів на тлі завад засобами просторів Кунченка // Праці X Всеукраїнської міжнародної конференції «УкрОБРАЗ-2010»: – К., 2010. – С.41–44. 6. Заболотный С.В., Салыпа С.В., Чепинога А.В. Синтез и моделирование непараметрических адаптивных обнаружителей энергетического типа с использованием стохастических полиномов Кунченко // Сб. научн. трудов 4-го Международного радиоэлектронного форума «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития»: – Харьков, 2011. – Т. I, Ч. 1. – С.164–167. 7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: – М.: Наука, 1977. – 432 с. 8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с. 9. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с. 10. Жовинский А.Н., Жовинский В.Н. Инженерный экспресс-анализ случайных процессов. – М.: Энергия, 1979. – 113 с. 11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1963. – 512 с.

УДК 621.317.73+621.382

А.В. Хома
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційно-вимірювальних технологій

РОЗРОБЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИНХРОННОГО ДЕТЕКТОРА

Розроблено математичну модель синхронного детектора, яка враховує динамічні похибки операційного підсилювача. Обґрунтовано підхід до одержання спрощеної моделі, на основі якої розроблено алгоритми корекції. Досліджено, що застосування алгоритмів корекції дає можливість на два порядки розширити діапазон робочих частот синхронного детектора.

Ключові слова: математична модель, корекція.

Phase detector mathematical model, that includes operational amplifier dynamical properties of is designed. Simplified model was received by linearization. This model was used for development of correction algorithms. Application of the developed algorithms allows to expand frequency range of the phase detector on two decades.

Key words: mathematical model, correction.

Вступ

Синхронне детектування широко застосовується для перетворення сигналів у різних сферах науки і техніки, зокрема у телекомунікаційних пристроях, медичній апаратурі, вимірювальній техніці [1–3]. Крім забезпечення високої завадостійкості, синхронне детектування дає можливість здійснювати розклад комплексної напруги на складові у декартовій системі координат. Таке завдання є традиційним у вимірювачах комплексного опору та провідності [4, 5].

Як приклад, на рис. 1 наведено схему, яка ілюструє застосування синхронних детекторів для вимірювання активної та реактивної складових комплексної провідності.

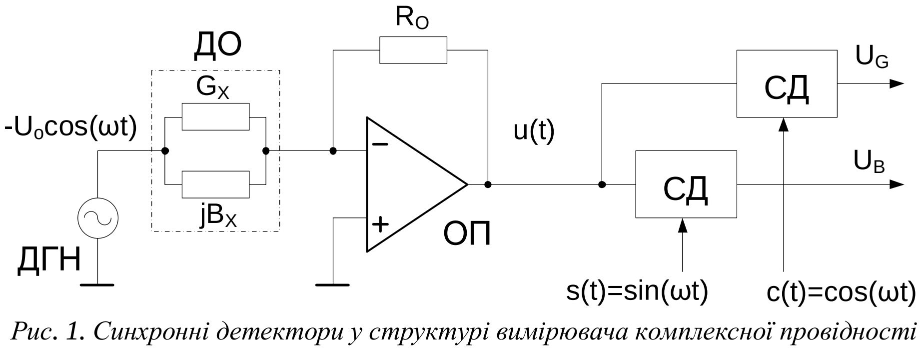

Рис. 1. Синхронні детектори у структурі вимірювача комплексної провідності