УДК 621.372.061

Ю.І. Шаповалов, Д.Р. Смаль
Національний університет “Львівська політехніка”

ОЦІНКА АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ РЯДІВ ФУР’Є

Розглянуто можливість оцінювання асимптотичної стійкості лінійних параметричних кіл за їх нормальною передавальною функцією при апроксимації цієї функції зрізаними рядами Фур’є у тригонометричному та експоненціальному вигляді. Показано, що для оцінки такої стійкості не потрібно визначати бічастотну передавальну функцію.

We considered the possibility of estimation of asymptotic stability of linear parametric circuits by their normal transfer function during approximation of this function by Fourier cut series in trigonometric and exponential form. It is shown that for evaluation of such stability it is not necessary to define double frequency transfer function.

Вступ

У [1] показано, що в разі аналізу лінійних параметричних кіл частотним символьним методом [2] апроксимація нормальної передавальної функції кола $W(s,x)$ зрізаним тригонометричним рядом Фур’є:

$$\hat{W}(s,x) = W_0(s) + \sum_{i=1}^{k} [W_{ci}(s)\cos(i\Omega x) + W_{si}(s)\sin(i\Omega x)] \quad (1)$$

істотно спрощує оцінювання асимптотичної стійкості цього кола. У виразі (1) $s = s + jw$ – комплексна змінна, x – момент подавання на вхід кола дельта-імпульсу; $W_0(s)$, $W_{ci}(s)$, $W_{si}(s)$ – незалежні від x дробово-раціональні функції комплексної змінної s, що відповідно до частотного символьного методу мають однаковий знаменник, який далі позначатимемо через $\Delta_t(s)$; k – кількість гармонік у ряді, $\Omega = 2p/T$, T – період зміни параметра параметричного елемента кола під дією сигналу накачки. Спрощення полягає у тому, що оцінювання асимптотичної стійкості у цьому випадку зводиться від аналізу характеристики збіжності $r = c(s)$ [3, 4] бічастотної функції передачі кола $W(s,r)$ з двома комплексними змінними s та $r = r + jm$ до звичайного знаходження кореня знаменника $\Delta(s)$ нормальної функції передачі кола $W(s,x)$ з найбільшою дійсною частиною [1]. При цьому, якщо така дійсна частина від’ємна, то коло асимптотично стійке, у протилежному випадку – нестійке [3]. Оскільки один із способів обчислення $W(s,r)$ полягає в обчисленні $W(s,x)$, то непотрібність обчислення $W(s,r)$ сама по собі робить оцінку стійкості економнішою щодо затрат зусиль та часу, а крім того, обчислення коренів функції $W(s,x)$ є завданням простішим, ніж побудова та аналіз характеристики збіжності $r = c(s)$.

З іншого боку, у [5] показано, що з погляду ефективності частотного символьного методу апроксимація функції $W(s,x)$ експоненціальним рядом Фур’є

$$\hat{W}(s,t) = W_{\pm 0}(s) + \sum_{i=1}^{k} [W_{-i}(s)\cdot\exp(-j\cdot i\cdot\Omega\cdot t) + W_{+i}(s)\cdot\exp(+j\cdot i\cdot\Omega\cdot t)] \quad (2)$$

($W_{\pm 0}(s)$, $W_{-i}(s)$, $W_{+i}(s)$ – незалежні від часу t дробово-раціональні функції комплексної змінної s , що згідно з частотним символьним методом мають однаковий знаменник, який далі позначатимемо через $\Delta_e(s)$) порівняно з тригонометричним рядом (1), набагато привабливіша і дає змогу розв’язувати задачі істотно вищих порядків складності. Такий факт, справді, відзначається [5], хоча, здавалось би, форма ряду Фур’є не має істотно впливати на хід і особливості обчислювального процесу. Отже, якщо обчислення $W(s,x)$ доцільніше виконувати за апроксимацією (2), то й виникає необхідність перевірити можливості цієї апроксимації (2) у задачах оцінки асимптотичної стійкості лінійних параметричних кіл при їх аналізі частотним символьним методом.

Зауважимо й таке. Оскільки зв'язок дробово-раціональних функцій з (1) та (2) має вигляд [6]:

$$W_0(s) = 2W_{\pm 0}(s),\ W_{ci}(s) = W_{+i}(s) + W_{-i}(s),\ W_{si}(s) = j[W_{+i}(s) + W_{-i}(s)],$$

то, очевидно, що за однакових k їх відповідні знаменники $\Delta_t(s)$ та $\Delta_e(s)$ рівні. Позначимо їх через $\Delta(s)$: $\Delta_t(s) = \Delta_e(s) = \Delta(s)$.

Мета роботи. Зважаючи на вищенаведене, метою роботи вважаємо визначення можливості оцінки асимптотичної стійкості лінійного параметричного кола за апроксимації $W(s,x)$ виразом (2).

Основна частина. Виходимо з того, що асимптотична стійкість зазвичай [3] оцінюється за бічастотною функцією передачі кола $W(s,r)$, один із способів визначення якої полягає у застосуванні перетворення Лапласа до нормальної передавальної функції $W(s,x)$ по змінній x [3]:

$$W(s,r) = \int_0^\infty W(s,x)e^{-rx}dx\ , \tag{3}$$

яка, своєю чергою, є перетворенням Лапласа імпульсної передавальної функції кола $w(t,x)$ за змінною часу t .

Підставимо (2) у (3) і зазначимо, що за апроксимації функції $W(s,x)$ виразом (2) визначення інтеграла (3) зводиться до обчислення таких інтегралів:

$$W(s,r) = W_{\pm 0}(s)\int_0^\infty e^{-rx}dx + \sum_{i=1}^{k}[W_{-i}(s)\int_0^\infty e^{-ji\Omega x}e^{-rx}dx + W_{+i}(s)\int_0^\infty e^{+ji\Omega x}e^{-rx}dx]. \tag{4}$$

Враховуючи, що [6]:

$$\int_0^\infty e^{-rx}dx = \frac{1}{r},\ \int_0^\infty e^{-ji\Omega x}e^{-rx}dx = \frac{1}{r+ji\Omega},\ \int_0^\infty e^{+ji\Omega x}e^{-rx}dx = \frac{1}{r-ji\Omega},$$

отримуємо вираз для бічастотної передавальної функції кола у вигляді:

$$W(s,r) = W_{\pm 0}(s)\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{k}[W_{-i}(s)\frac{1}{r+ji\Omega} + W_{+i}(s)\frac{1}{r-ji\Omega}]. \tag{5}$$

У виразі (5), згідно з критерієм асимптотичної стійкості [3, 4], необхідно визначити всі порушення аналітичності, які визначаються коренями його знаменника. З цього самого виразу (5) випливає, що його знаменник, який позначимо через $\Delta_e(s,r)$, можемо записати у вигляді:

$$\Delta_e(s,r) = \Delta(s)\cdot r\cdot\prod_{i=1}^{k}[(r-ji\Omega)\cdot(r+ji\Omega)]. \tag{6}$$

Вигляд виразу (6) переконує, що множина коренів виразу $\Delta_e(s,r)$ складається з множини коренів полінома $\Delta(s)$ функції $W(s,x)$ та коренів:

$$r_0 = 0,\ r_{1,2} = \pm j\Omega,\ r_{3,4} = \pm j2\Omega,\ \ldots,\ r_{2k-1,2k} = \pm jk\Omega. \tag{7}$$

Оскільки дійсні частини всіх коренів у (7) нульові, то на підставі викладеного у [1] робимо висновок про те, що *апроксимація* $\hat{W}(s,x)$ *не тільки у вигляді* **(1),** *але й у вигляді* **(2)** *зводить проблему оцінки асимптотичної стійкості кола від аналізу характеристики збіжності* $r = c(s)$ *функції* $W(s,r)$ *до звичайного знаходження кореня знаменника* $\Delta(s)$ *нормальної функції передачі кола* $W(s,x)$ *з найбільшою дійсною частиною.*

Висновки. У статті показано, що апроксимація нормальної функції передачі $\hat{W}(s,x)$ зрізаним рядом Фур'є (2), за аналогією з апроксимацією (1), зводить проблему оцінки асимптотичної стійкості кола з аналізу характеристики збіжності $r = c(s)$ функції $W(s,r)$ до звичайного знаходження кореня знаменника $\Delta(s)$ нормальної функції передачі кола $W(s,x)$ з найбільшою дійсною частиною. Цей факт дає змогу відмовитись від обчислення функції $W(s,r)$ та переконує, що для оцінки асимптотичної стійкості лінійного параметричного кола при апроксимації функції $W(s,x)$ чи за рядом (1), чи за рядом (2) достатньо :

а) знайти частотним символьним методом у вигляді рядів (1) чи (2) нормальну передавальну функцію $\hat{W}(s,x)$ цього кола;

б) знайти корені знаменника $\Delta(s)$ функції $\hat{W}(s,x)$;

в) визначити серед коренів полінома $\Delta(s)$ наявність коренів з нульовою або додатною дійсними частинами. Якщо такі корені існують, то коло нестійке, якщо ні – то коло стійке асимптотично.

1. Шаповалов Ю.І. Особливості оцінки асимптотичної стійкості лінійних параметричних кіл частотним символьним методом // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. – Вип. 55. – К., 2010. – С. 126–133. 2. Шаповалов Ю., Мандзій Б. Символьний аналіз лінійних параметричних кіл: стан питань, зміст і напрямки застосування // Теоретична електротехніка. – 2007. – Вип. 59. – С.3–9. 3. Солодов А.В., Петров Ф.С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. – М.: Наука, 1971. – 620 с. 4. Бриккер И.Н. О частотном анализе линейных систем с переменными параметрами // Автоматика и телемеханика, № 8, 1966. – С.43–54. 5. Шаповалов Ю.І., Маньковський С.В. Застосування топологічних методів за символьного аналізу лінійних параметричних кіл // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Електроніка та телекомунікації", № 618. – 2008. – С. 76–81. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров. – М., 1974. – 832 с.