обеспечивает развязку сигналов в соседних стволах не менее чем на 15 дБ) позволит повысить эффективность системы в несколько раз.

*1. Выговский Р.В. Использование многопозиционных сигналов с АФМ в технологии WiMax. Моделювання та інформаційні технології // Зб. наук. праць. – 2008. – Вип. 49. – С. 159–165. 2. Васильев В.Г. Технология фиксированного широкополосного беспроводного доступа WiMAX стандарта ШЕЕ 802.16-2004 // ЮНИДАТА – 2009. 3. Сундучков А.К. Новый метод повышения пропускной способности сети // Труды 19-й Международной Крымской конференции "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии". (CriMiCo-09), с. 255, том 1. 4. Satellite Communications Fixed - satellite service // International Radio Consultative Commite, International Telecommunication Union. - Geneva, 1988. 5. Бобков В., Ефимов М., Киселев А. и др. Поляризационная развязка: взгляд эксперта. Оценка требований по кросс-поляризационным характеристикам антенн земных станций спутниковой связи // Connect. – 2004. – № 2. – С. 85–89. 6. Петрович Н.Т., Камнев Е.Ф., Каблукова М.В. Космическая радиосвязь // Под ред. Н.Т. Петровича. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1979.*

**УДК 621.395**

**А.Г. Ложковський, В.Ю. Гордієнко**
Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

# ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ СТАНІВ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВІДМОВ ДЛЯ МОДЕЛІ ТИПУ HM/D/M



**Запропоновано апроксимацію усіченим нормальним законом імовірнісної функції розподілу станів повнодоступної системи з втратами, яка обслуговує мультисервісний трафік з постійною тривалістю обслуговування вимог. На основі цієї апроксимації запропонована формула розрахунку ймовірності втрати вимоги.**

**For the full-accessible lossy system with multi-services traffic flow and constant holding time the approximating of probability distribution function by the truncated Gauss law is offered. On the basis of the given approximating the account formula of loss probability of the request is offered.**

**Вступ.** Для проектування систем розподілу інформації необхідно знати окремі ймовірності функції розподілу станів системи. Для *пуассонівського* потоку ця задача розв'язується відомим розподілом Ерланга, для примітивного – розподілом Енгсета [1]. Однак для реальних потоків мультисервісних мереж зв'язку адекватних методів розрахунку не існує. Метою цієї роботи є обґрунтування використання усіченого нормального закону для апроксимації імовірнісної функції розподілу станів повнодоступної системи з втратами, яка обслуговує *гіперекспонентний* потік вимог з постійною їхньою тривалістю.

Фундаментом досліджень систем розподілу інформації (СРІ) є їх типізована математична модель. Для повного опису СРІ необхідно вказати імовірнісні процеси, що описують вхідний потік вимог, структуру системи та дисципліну обслуговування. Очевидно, що оцінка якості обслуговування (*QoS*) або пропускної здатності СРІ потребує врахування всіх цих елементів її моделі. Найскладнішим є урахування математичної моделі вхідного потоку вимог. Незалежно від способу надання математичної моделі потоку вимог вибрана модель обов'язково має бути адекватною реальним потокам трафіку телекомунікаційних мереж, оскільки від цього істотно залежить точність розрахунку характеристик якості обслуговування та пропускної здатності СРІ при їх аналізі, синтезі та оптимізації.

Основні параметри трафіку – це інтенсивність навантаження Λ (середня кількість вимог, що надійшли до системи за середню тривалість обслуговування) та дисперсія інтенсивності навантаження $\sigma^2$, яка вказує на ступінь нерівномірності випадкової кількості вимог відносно середнього значення. Математичною моделлю трафіку є імовірнісна функція розподілу випадкової кількості вимог *i* за середню тривалість обслуговування *t*.

**Модель трафіку мультисервісних мереж.** У телефонних мережах з єдиною послугою телефонного зв'язку трафік є однорідним і його математична модель може бути наближена відомою функцією Пуассона. Параметри трафіку Λ та $\sigma^2$ досить близькі або однакові, тобто $\sigma^2 = \Lambda$. Інтегральний характер мультисервісних мереж з розширеним спектром надаваних послуг зумовлює різнорідність трафіка, яка сильно змінює співвідношення цих параметрів та його математичну модель.

У математичній моделі пуассонівського потоку вимог інтервал часу між вимогами $z$ розподілений за експонентним законом, а випадкова кількість вимог за середню тривалість обслуговування розподілена за законом Пуассона. Тому ступінь відхилення інших потоків від моделі пуассонівського потоку можна оцінити за коефіцієнтом варіації

$$v_z = \frac{\sigma_z}{\overline{z}},$$

імовірнісної функції розподілу інтервалу $z$ або за коефіцієнтом скупченості інтенсивності навантаження (пікфактором трафіку) $S$, який визначається як співвідношення перших двох моментів випадкової кількості вимог за середню тривалість обслуговування:

$$S = \frac{\sigma^2}{\Lambda}. \tag{1}$$

Для експонентного розподілу $v_z \equiv 1$ і тому для пуассонівського потоку, відповідно, $S \equiv 1$. Очевидно, що чим більшим буде розкид інтервалу $z$ (тобто $v_z$), тим більшою буде й скупченість інтенсивності навантаження $S$.

За результатами статистичного моделювання, виконаного за допомогою імітаційної моделі [4], встановлено, що у випадку гіперекспонентного розподілу інтервалу часу між вимогами коефіцієнт варіації $v_z$ та пік-фактор інтенсивності трафіка $S$ перебувають у такій залежності :

$$v_z^2 = \left(\frac{\sigma_Z}{M_Z}\right)^2 = S.$$

Реальним потокам мультисервісних мереж зв'язку притаманна підвищена нерівномірність трафіку, за якої коефіцієнт варіації $v_z > 1$ та пікфактор $S = 2\ldots10$. Іноді $S$ може бути й більше за 10, але це відбувається або за межами години найбільшого навантаження, або на невеликих пучках каналів [2]. Оскільки модель пуассонівського потоку не завжди адекватно описує реальні потоки вимог телекомунікаційних мереж, то необхідно вибирати інші розподіли для їхнього опису, що забезпечують краще узгодження з результатами вимірів. Заміна експонентного розподілу будь-якими іншими функціями значно ускладнює математичну модель, а складні моделі не завжди піддаються аналітичному розв'язанню.

Потоки вимог у мультисервісних мережах зв'язку формуються множиною джерел з різною питомою інтенсивністю навантаження (різнорідні потоки). У процесі створення потоку вимог беруть участь джерела, що належать до тієї або іншої групи споживачів сервісів з близькими інтенсивностями навантаження. Значення інтенсивності результуючого потоку вимог в кожну мить залежить від того, до якої групи за інтенсивністю навантаження належить джерело і яке співвідношення чисельності цих джерел з іншими. Отже, адекватніше описати такий потік або розподіл інтервалів часу між вимогами можна не експонентним розподілом ($M$), а їхньою сумішшю – гіперекспонентним розподілом ($HM$):

$$P(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i z}\text{, якщо } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2}$$

Модель потоку з гіперекспонентним розподілом $k$-го порядку забезпечує діапазон значень коефіцієнта варіації в межах $1 \le v_z < \infty$. Цьому розподілу відповідає перервний пуассонівський потік $k$-го порядку. Практичні виміри свідчать, що реальні потоки достатньо апроксимувати з $k = 2$. Цей розподіл описує більший розкид величини інтервалу часу між вимогами $z$ і забезпечує значення коефіцієнтів $v_z \ge 1$, а це, своєю чергою, дає змогу описувати реальні потоки з дисперсією інтенсивності навантаження $\sigma^2$, що перевищує її математичне сподівання $\Lambda$ від одиниць до десятків разів.

Експонентний інтервал часу між вимогами призводить до пуассонівського розподілу кількості вимог, що надходять до системи за середню тривалість їх обслуговування. Гіперекспонентний інтервал часу між вимогами призводить до такого розподілу кількості вимог, який достатньо точно апроксимується нормальним (Гаусса) законом. Отже, для реальних потоків вимог мультисервісних мереж зв’язку адекватною є модель з гіперекспонентним розподілом інтервалу часу між вимогами, що апроксимується нормальним розподілом інтенсивності навантаження $\Lambda$, і при цьому пікфактор інтенсивності навантаження $S > 1$.

**Розподіл станів системи.** Визначення основних характеристик якості обслуговування будь-якої системи ґрунтується на визначенні імовірнісної функції розподілу її станів $P_j$, де стан системи – це поточна кількість серверів $j$, в яких обслуговуються вимоги, а $P_j$ – імовірність стану $j$. За гіперекспонентного потоку та постійної тривалості обслуговування умовне позначення математичної моделі системи розподілу інформації з $m$ серверами запишеться так: $HM/D/m$. В умовах необмеженої кількості серверів (модель $HM/D/\infty$) вимоги обслуговуються за дисципліною без втрат. За постійної тривалості обслуговування $t$, коли нема втрат, властивості потоку звільнень збігаються із властивостями потоку надходження вимог, тому що відбувається тільки зсув у часі на величину $t$ між моментом надходження вимоги та моментом її виходу із системи (завершення обслуговування). Стани системи повністю визначаються властивостями потоку вимог, а імовірнісні функції розподілу кількості вимог у системі $j$ і вхідної кількості вимог $i$ за час $t$, повністю збігаються. За нормального розподілу кількості вимог, що надходять в систему за середню тривалість їх обслуговування, нормальна функція розподілу потоку вимог $P_i$ визначить функцію розподілу станів системи $P_j$:

$$P_i = P_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(i-\Lambda)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3}$$

У разі обмеженої до $m$ кількості серверів простір станів системи буде також обмеженим від 0 до $m$. У цьому випадку моделі $HM/D/m$ імовірнісна функція розподілу станів системи може бути апроксимована усіченим нормальним законом [3, с. 429], що визначає імовірності станів системи $P_j$ в межах $0 \le j \le m$:

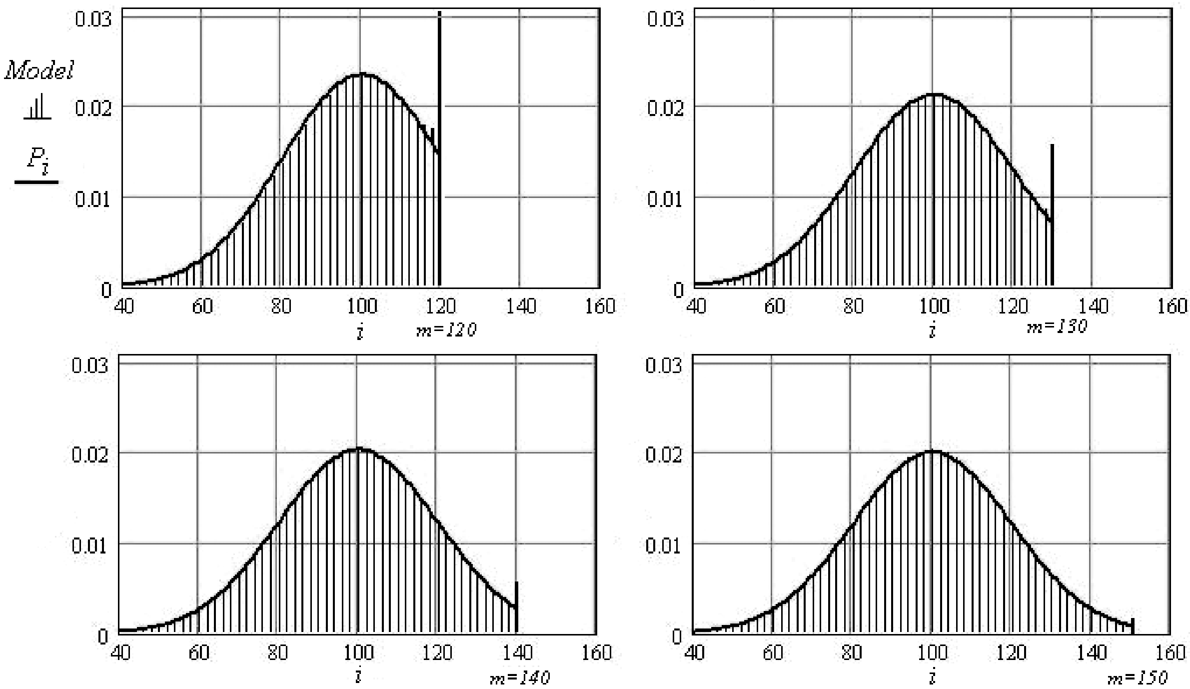
$$P_j = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(j-\Lambda)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4}$$

де

$$A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^{\frac{m-\Lambda}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^{\frac{0-\Lambda}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]}. \tag{5}$$

Якщо $m = \infty$, то $A = 1$ і тому (3) та (4) збігаються. Крім того, для (3) та (4) має виконуватись $\sum_{i=0}^{m} P_j = 1$.

На рис. 1 показано гістограми, які отримано в результаті моделювання [4] процесу обслуговування мультисервісного трафіку в системі *HM/D/m* при $\sigma^2 / \Lambda = 4$ (тобто пікфактор $S = 4$), і побудовані апроксимації (безперервні лінії) розподілів станів системи $P_j$, що розраховані за формулою (4). Інтенсивність навантаження становить $\Lambda = 100$ вимог за тривалість обслуговування, а в системі є $m$ = 120, 130, 140 і 150 каналів.




*Апроксимація результатів моделювання усіченим нормальним законом*

За допомогою імітаційного алгоритму [4] перевірено точність цієї апроксимації усіченим нормальним законом. У широкому діапазоні зміни параметрів трафіку $\Lambda$ і $\sigma^2$ та кількості серверів $m$ відносна похибка запропонованого підходу не перевищує 1 % для всіх значень $P_j$, окрім $P_{j=m}$. Процес обслуговування вимог у системі є ергодичним або не залежить від початкового стану системи за умови $m > \Lambda$ [1]. Якщо кількість серверів $m$ істотно перевищує значення інтенсивності $\Lambda$, то у цьому випадку початковий стан системи незначно впливає на функцію розподілу станів системи. При зменшенні $m$ початковий стан системи найбільше впливає саме на імовірність $P_{j=m}$. Це відбувається через "скупченість" потоку вимог реального трафіку, яка випливає з його властивості $\sigma^2 > \Lambda$. Саме у випадках зайнятості всіх серверів системи, при звільненні будь-якого з серверів він одразу ж займається черговою вимогою, яка в цей час надходить до системи через скупченість вимог на цьому інтервалі часу, а це підтримує систему триваліший час у стані "насичення", тобто у стані $P_{j=m}$, і реально ця ймовірність є дещо більшою.

**Імовірність втрат.** Імовірність зайнятості всіх серверів системи $P_{j=m}$ визначає частку часу, упродовж якої є потенційна можливість втрати вимоги. Для пуассонівського потоку, де $\sigma^2 = \Lambda$ і $S = 1$, імовірність $P_{j=m}$ збігається з імовірністю втрати вимоги $P_B$. Але у разі гіперекспонентного потоку, де $\sigma^2 > \Lambda$, з урахуванням вищенаведеного випливає, що імовірність втрати вимоги $P_B$ більша від ймовірності зайнятості всіх серверів системи $P_{j=m}$ у $S$ разів, тобто пропорційна до коефіцієнта скупченості інтенсивності навантаження. Отже, імовірність втрати вимоги $P_B$ можна визначити множенням (4) на (1), і для стану $j = m$ остаточно отримуємо:

$$P_B = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{m-\Lambda}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{\Lambda}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(m-\Lambda)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{\Lambda}. \qquad (6)$$

Значення функції Лапласа (інтеграл імовірності), що використовується в знаменнику формули (6), наведене в математичних довідниках та підручниках, наприклад в [5, с. 412].

Якщо зручніші розрахунки через функцію помилок (функцію Крампа) erf($x$), то для функції Лапласа можна показати, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right),$$

і тоді після нескладного перетворення формули (6) одержуємо:

$$P_B = \frac{2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(m-\Lambda)^2}{2\sigma^2}}}{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m-\Lambda}{\sigma}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Lambda}{\sigma}\right)}\frac{\sigma^2}{\Lambda}. \qquad (7)$$

За умови $\sigma^2 \equiv \Lambda$ закони Гаусса та Пуассона досить близько збігаються вже при $\Lambda > 20$. Через те запропонований усічений нормальний розподіл (4) дає значення ймовірностей станів системи, які з такою самою точністю збігаються зі значеннями, які отримують за встановленим для цього випадку розподілом Ерланга. За цих самих умов відмінність значень, які одержуємо з (6) та визнаної для цього випадку *B*-формули Ерланга, не перевищує 5 %.

За розподілом Ерланга визначаються стани системи типу $M/G/m$ з експонентним розподілом інтервалу часу між вимогами потоку, для якого пікфактор трафіку $S = 1$. Гіперекспонентний розподіл (2) за $k = 1$ перетворюється на експонентний і тому він є його узагальненням. Але, на відміну від розподілу Ерланга, який справджується за будь-якого ($G$) закону розподілу тривалості обслуговування вимог, нормальний усічений розподіл станів системи при $S > 1$ справедливий тільки для моделі $HM/D/m$, тобто за постійної тривалості обслуговування.

**Висновки.** Особливо актуальним розподіл (4) є для сучасних мультисервісних мереж, які, як правило, є мережами з комутацією пакетів і постійною тривалістю їх обслуговування. Тут при широкому діапазоні швидкостей передачі (від сотні біт/с до сотні Мбіт/с) джерела кожної служби характеризуються максимальною (піковою) та середньою швидкостями передавання, їх співвідношенням. Значить, потоки трафіку тут нестаціонарні та непуассонівські. Інтегральною оцінкою всіх цих факторів у цьому випадку може бути дисперсія інтенсивності навантаження. Розподіл (4), який дає змогу враховувати цю дисперсію, може бути застосований, наприклад, для розрахунку умовної кількості вихідних портів пакетного комутатора, середньої кількості затриманих джерел (пакети яких перебувають у буфері більше від одного циклу), середнього заповнення вхідного буфера тощо. Постійною тривалістю обслуговування може бути описана робота керуючих пристроїв вузлів комутації або тривалість оброблення пакетів у пакетних мережах передавання даних, де потоки не є пуассонівськими. Саме для цих випадків застосування запропонованої апроксимації та методу розрахунку імовірності втрат буде адекватним.

*1. Шнепс М.А. Системы распределения информации. Методы расчета: Справ. пособие / А.М. Шнепс // М.: Связь. – 1979. – 344 с. 2. Захарченко Н.В. Методы расчёта телекоммуникационного оборудования в условиях реального потока вызовов / Н.В. Захарченко, А.Г. Ложковский // Вісник українського Будинку економічних та наукових знань. – 2004. – № 4. – С.102–109. 3. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике / А.М. Заездный // М.: Связь. – 1969. – 448 с. 4. Ложковский А.Г. Статистическое моделирование полнодоступного пучка с потерями / А.Г. Ложковский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2003. – № 1. – С.75–82. 5. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров // М.: Радио и Связь. – 1983. – 416 с.*