

Analyses provided shows that controlling first and second electrode value and second electrode position we controlling frequency characteristic parameters.

1. Варадан В., Виной К., Джозе К.ВЧ МЭМС и их применение. – М.: Техносфера, 2004. – 528 с.
2. Ruby R. Micromachined cellular filters, *Microwave Symposium Digest // IEEE MTT-S International*, pp. 370-377, 1996.
3. Pedro de Paco, Oscar Menendez “Equivalent circuit modeling of coupled resonator filters”, *IEEE transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency control*, vol. 53, No 9, pp. 2030–2037, sept. 2008.
4. Cady W. *Piezoelectricity. An introduction to the theory and application of electro-mechanical phenomena in crystal, first edition.* – New York–London, 1946. – 717.
5. Богдан А.В., Петрищев О.Н., Якименко Ю.И., Яновская Ю.Ю. Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора на основе радиальных колебаний тонких пьезокерамических дисков // *Электроника и связь: Тематический выпуск “Проблемы электроники”.* – 2009. – Ч.1 – С.269–274.

УДК 621.395.7

М.Й. Павликевич

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра

БАЗОВА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОПРОВІДНОЇ ЛІНІЇ У КВАЗІСТАЦІОНАРНОМУ НАБЛИЖЕННІ

© Павликевич М.Й., 2010

Наведено основні розрахункові співвідношення для математичної моделі багатопровідної лінії з паралельними круглими провідниками в круглій діелектричній ізоляції над провідною площиною. Первинні параметри лінії отримані у квазі-стаціонарному наближенні.

This article presents the model a multiconductor transmission line with parallel round wires surrounded by a dielectric insulation over ground plane. Primary parameters of a line are obtained in quasi-stationary approximation.

Вступ. Вивчення властивостей багатопровідних передавальних ліній важливе для їхнього ефективного використання в сучасних широкосмугових технологіях, зокрема, у технології Ethernet зі швидкостями пересилання понад 10 Гб/с. У більшості публікацій для теоретичних досліджень використовується апарат моделювання на основі теорії кіл із зосередженими параметрами (наприклад, PSPICE), недостатньо адекватний для випадків, коли довжина відрізка лінії порівняльна або перевищує довжину хвилі. У цій роботі для досліджень запропоновано використання базової математичної моделі регулярної багатопровідної лінії, утвореної системою паралельних циліндричних провідників у циліндричній діелектричній ізоляції, розташованих над провідною площиною так, що осі провідників паралельні між собою та до екрана (рис. 1). Модель побудована для наближення квазі-Т-хвиль з використанням апарата теорії багатопровідних ліній з розподіленими параметрами. Обчислення первинних параметрів лінії здійснено у квазістаціонарному наближенні, а для розрахунків передавальних властивостей застосовано апарат теорії багатополосників у класичному та хвильовому варіантах. Модель називається базовою, оскільки на її основі моделювання можна поширити на лінії різноманітної конфігурації, зокрема на нерегулярні лінії, утворені скрученими провідниками, на лінії типу «скручена пара».

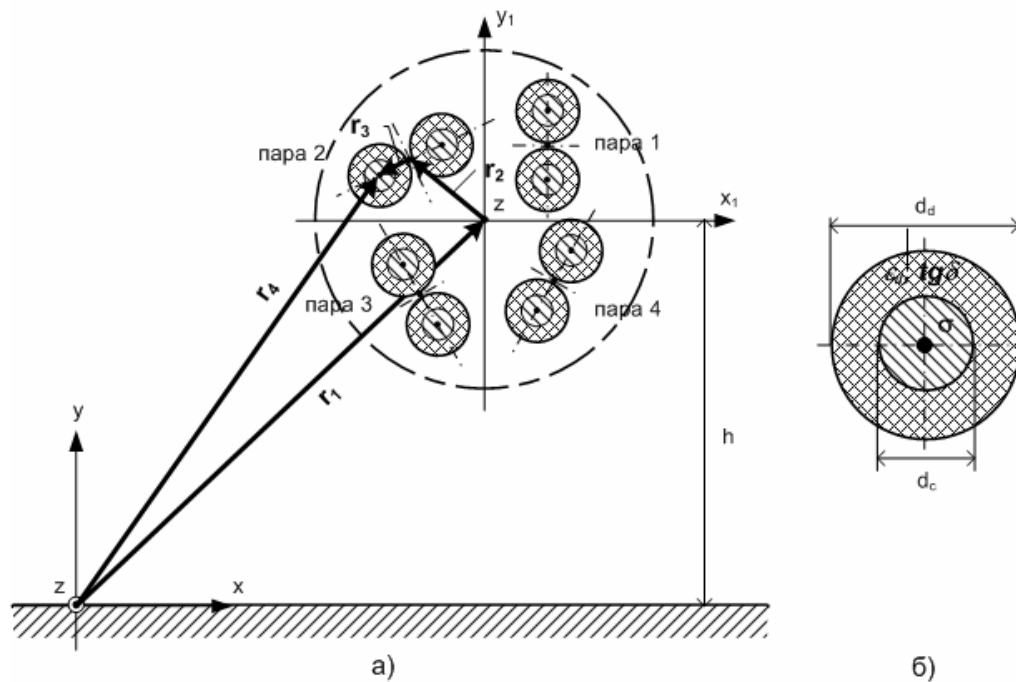


Рис. 1. Геометрія поперечного перерізу багатопровідної лінії (а) і переріз її ізольованого провідника (б)

Схема побудови базової математичної моделі. Базова математична модель М-провідної лінії – це М+М-поліосник, схемні параметри якого у вибраній системі класичних або хвильових параметрів відображають співвідношення між напругами і струмами на полюсах залежно від геометричних і електромагнітних параметрів відрізка *регулярної* лінії та частоти. Для побудови такої математичної моделі на основі теорії багатопровідних ліній необхідно обчислити:

□ матриці первинних параметрів багатопровідної лінії – комплексних погонних опорів $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{R}} + i\omega\tilde{\mathbf{L}}$ та провідностей $\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{G}} + i\omega\tilde{\mathbf{C}}$, де i означає мниму одиницю, ω – колову частоту, $\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{C}}$ – дійсні квадратні матриці резистивних опорів, індуктивностей, резистивних провідностей і ємнісних коефіцієнтів на одиницю довжини багатопровідної лінії відповідно;

□ власні значення та власні вектори для визначення модового спектра як розв'язки задач

$$(\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Y}} - \gamma^2 \mathbf{1})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}} - \gamma^2 \mathbf{1})\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

де $\mathbf{1}_M$, $\mathbf{0}$ означають відповідно одиничну та нульову матриці порядку M , а γ^2 , $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{i}}$ – власне значення та відповідні йому власний вектор напруг і власний вектор струмів, та сформувані матриці вторинних параметрів – діагональну матрицю коефіцієнтів поширення

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M] \quad (2)$$

і матриці власних векторів напруг $\hat{\mathbf{U}}$ та струмів $\hat{\mathbf{I}}$

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_1 \quad \hat{\mathbf{u}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{u}}_M], \quad \hat{\mathbf{I}} = [\hat{\mathbf{i}}_1 \quad \hat{\mathbf{i}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{i}}_M], \quad (3)$$

а на їх підставі – матриці модових і характеристичних провідностей або опорів;

□ класичні або хвильові схемні параметри відрізка лінії заданої довжини потрібні для розрахунку робочих параметрів і характеристик під час досліджень з використанням цієї математичної моделі.

Обчислення первинних параметрів багатопровідної лінії. Схема обчислень полягає у послідовному здійсненні кількох етапів розрахунків:

□ обчислення матриці ємнісних коефіцієнтів вказаної системи провідників для випадків відсутності та наявності діелектричної ізоляції навколо провідників, що відповідає однорідному та неоднорідному діелектричному заповненню лінії;

- обчислення матриці погонних зовнішніх індуктивностей системи провідників на підставі ємнісних коефіцієнтів за однорідного діелектричного заповнення;
- обчислення комплексного опору окремого провідника з урахуванням його питомої провідності і частоти;
- корегування власних і взаємних індуктивностей з урахуванням внутрішньої індуктивності провідників на підставі уявних складових комплексних опорів провідників; обчислення матриці погонних резистивних опорів на підставі дійсних складових комплексних опорів провідників і матриці погонних зовнішніх індуктивностей;
- обчислення активних складових власних та взаємних поперечних провідностей на підставі ємнісних коефіцієнтів і тангенса діелектричних втрат ізоляції.

Для формування матриці ємнісних коефіцієнтів у цій роботі запропоновано використати обчислення власної ємності кожного провідника та взаємних ємностей між цим провідником і кожним з інших провідників по черзі, при цьому впливом інших провідників, крім вибраних двох, на значення взаємної ємності знехтувано, а вплив провідної площини враховано за допомогою дзеркальних зображень. У такий спосіб задача зведена до обчислення взаємної ємності між двома циліндричними провідниками з паралельними осями, оточеними циліндричними діелектричними шарами.

Для обчислення вказаних ємностей застосовано модифікацію методу розв'язання подібної задачі з використанням конформного відображення, викладеного в [1, с. 122–126]. Модифікація полягає у впровадженні до розгляду циліндричного діелектрика навколо кожного провідника, при цьому поверхня діелектрика повинна збігатись з екіпотенціальною поверхнею, як це властиво провідникам. Ідея методу полягає у використанні конформного відображення, яке здійснюється функцією комплексної змінної:

$$w(z) = \frac{z-a}{z+a} = \rho \cdot \exp(i\varphi), \quad (4)$$

де
$$\rho = \left| \frac{z-a}{z+a} \right| = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}}; \quad (5)$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a}.$$

Точкам на комплексній площині w відповідають точки на площині z згідно з оберненою функцією:

$$z(w) = a \cdot \frac{1-w}{1+w}.$$

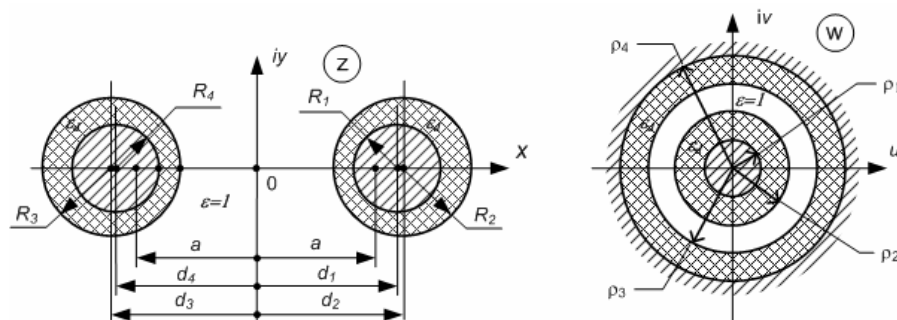


Рис. 2. Конформне відображення області між провідниками на кільцеву область

Ця функція відображає одиничний круг $\rho \leq 1$ у площині $w = u + iv$ на праву півплощину площини $z = x + iy$, масштабуючи це відображення відповідно до значення константи a (рис. 2). При цьому початок координат $\rho = 0$ у площині w відповідає точці $z = a$ у площині z , точка

Є $w=1$ – початку координат $z=0$, а одиничне коло $\rho=1$ відповідає уявній осі iy . За дійсного значення параметра a інтервал $[0,1]$ дійсної осі u площини w відповідає відрізку $[a,0]$ дійсної осі x площини z , а інтервал $[0,-1]$ відповідає інтервалу $[a,+\infty)$ на площині z . Зовнішність одиничного круга $\rho>1$ відображається на ліву півплощину z , так що точці $z=-a$ відповідає безмежно віддалена точка $\rho=\infty$. Точки $x\in[0,a]$ і відповідні точки $a/x\in[\infty,a]$ лежать на протилежних кінцях діаметра того самого кола у площині z .

Прийmemo, що центри колових поперечних перерізів провідників радіусами R_1 і R_4 і діелектриків радіусами R_2 і R_3 містяться на дійсній осі на відстанях d_1 і d_4 та на відстанях d_2 і d_3 відповідно (рис. 1). Функція (3) дає змогу відобразити цю конфігурацію з площини z на площину w , зводячи тим самим електростатичну задачу про знаходження ємності між двома провідниками з діелектричним оточенням у вихідній конфігурації до такої самої задачі в конфігурації, яка відповідає циліндричному конденсатору з радіально розділеними шарами різних діелектриків. Методична похибка стосовно початкової задачі виникає внаслідок взаємного зміщення осей провідників і діелектриків на величину $d_2 - d_1 = |d_3 - d_4|$, вона максимальна, коли ізоляції суміжних провідників дотикаються, і зменшується за зростання відстані між ними. Однак уведення такого зміщення дає змогу отримати простий розв'язок вихідної задачі, яка забезпечує якісно правильні результати. Зауважимо, що в точках $x = \pm a$ можна розташувати віртуальні лінійні заряди, які створюватимуть електричне поле, ідентичне до поля між реальними провідниками. На підставі виразу (4) еквіпотенціальні лінії на площині z описуються співвідношенням

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = \rho^2 = K = \text{const},$$

яке, після простих перетворень, можна звести до вигляду канонічного рівняння кола:

$$\left[x - a \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \right]^2 + y^2 = \frac{4a^2 \rho^2}{(1 - \rho^2)^2},$$

радіус якого дорівнює

$$R = \left| \frac{2a\rho}{1 - \rho^2} \right| \quad (6)$$

і центр якого розташований на осі x у точці

$$d = \pm a \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2}. \quad (7)$$

Знаки для координат положення центрів відповідають додатній і від'ємній півосям осі x .

На підставі формули (5) можна встановити взаємозв'язки між радіусами поверхонь провідників та діелектриків у площині z та відповідними радіусами у площині w :

$$R_1 = \left| \frac{2a\rho_1}{1 - \rho_1^2} \right|, \quad R_2 = \left| \frac{2a\rho_2}{1 - \rho_2^2} \right|, \quad R_3 = \left| \frac{2a\rho_3}{1 - \rho_3^2} \right|, \quad R_4 = \left| \frac{2a\rho_4}{1 - \rho_4^2} \right|,$$

а на підставі (6) – виразити положення осей циліндричних провідників і діелектриків на осі x через відповідні їм радіуси у площині w і константу a :

$$d_1 = a \frac{1 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \quad d_2 = a \frac{1 + \rho_2^2}{1 - \rho_2^2}, \quad d_3 = a \frac{1 + \rho_3^2}{1 - \rho_3^2}, \quad d_4 = a \frac{1 + \rho_4^2}{1 - \rho_4^2}. \quad (8)$$

Звідси отримаємо значення константи a , тобто положення віртуальних лінійних зарядів на осі x , а також значення параметра $K_i = \rho_i^2$:

$$a = \sqrt{d_i^2 - R_i^2}, \quad K_i = \left| \frac{d_i - a}{d_i + a} \right|, \quad i = 1, 4. \quad (9)$$

На підставі формули для ємності циліндричного конденсатора з радіально розшарованим діелектриком (2, с. 86) з урахуванням наведених тут позначень отримаємо вираз для взаємної ємності на одиницю довжини між p -м та q -м провідниками:

$$C_{pq} = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_d} \ln \frac{K_2 K_4}{K_1 K_3} + \ln \frac{K_3}{K_2}}. \quad (10)$$

За однакових радіусів відповідно обидвох провідників і обидвох діелектриків справедливі рівності $K_4 = 1/K_1$, $K_3 = 1/K_2$, тому

$$C_{pq} = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_d} \ln \frac{K_2}{K_1} + \ln \frac{1}{K_2}}. \quad (11)$$

Зауважимо, що ємність p -го провідника стосовно провідної площини вдвічі більша від взаємної ємності між цим провідником та його дзеркальним зображенням p' : $C_{pp} = 2C_{pp'}$.

Наведені вирази (8)–(10) використані для формування матриць ємнісних коефіцієнтів багатопровідної лінії – матриці $\tilde{\mathbf{C}}$ для номінального значення відносної діелектричної проникності ізоляції провідників ε_d і матриці $\tilde{\mathbf{C}}_1$ для $\varepsilon_d = 1$. Результати обчислень показують, що запропонований підхід дає змогу отримати якісно коректні результати, зокрема, врахувати неоднорідність діелектричного заповнення поперечного перерізу лінії, що є істотним для правильного моделювання модового спектра квазі-Т-хвиль у лінії і частотних залежностей фазових коефіцієнтів мод.

На підставі матриці $\tilde{\mathbf{C}}_1$ можна безпосередньо обчислити матрицю зовнішніх власних і взаємних індуктивностей $\tilde{\mathbf{L}}_o$, оскільки у разі однорідного діелектричного заповнення в лінії існують тільки моди Т-хвилі, а для них справедливе співвідношення

$$\tilde{\mathbf{L}}_o \cdot \tilde{\mathbf{C}}_1 = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{1}. \quad (12)$$

Власний активний (резистивний) опір і власна внутрішня індуктивність окремого провідника лінії можуть бути обчислені за точною формулою для комплексного внутрішнього опору поодинокого круглого провідника радіусом r_c [3]:

$$Z_i = \frac{p}{2\pi r_c \sigma} \cdot \frac{J_0(pr)}{J_1(pr)}, \quad (13)$$

де $p = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}$, σ – питома провідність провідника; $J_0(z)$, $J_1(z)$ – функції Бесселя першого роду відповідно нульового і першого порядку від комплексної змінної z . Дійсна частина цього комплексного опору $R_i = \text{Re}(Z_i)$ – це власний активний опір одиниці довжини провідника, а уявна частина $X_i = \omega L_i$ – це власний індуктивний опір, викликаний внутрішньою індуктивністю провідника L_i . Взаємні внутрішні індуктивності запропоновано обчислювати пропорційно до взаємної зовнішньої індуктивності:

$$\tilde{\mathbf{L}}_i = \frac{L_i}{\tilde{L}_{opp}} \tilde{\mathbf{L}}_o, \quad (14)$$

де \tilde{L}_{opp} – власна зовнішня індуктивність p -го провідника, тобто p -й діагональний елемент матриці $\tilde{\mathbf{L}}_o$. В подібний спосіб можна наближено обчислити взаємні активні (резистивні) опори провідників, враховуючи те, що поява позадіагональних елементів матриці $\tilde{\mathbf{R}}$ викликана впливом магнітної індукції на струми в провідниках:

$$\tilde{\mathbf{R}}_i = \frac{R_i}{\tilde{L}_{opp}} \tilde{\mathbf{L}}_o. \quad (15)$$

Отже, погонні параметри багатопровідної лінії остаточно отримуємо у вигляді чотирьох матриць

$$\tilde{\mathbf{R}} \equiv \tilde{\mathbf{R}}_i, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}_i + \tilde{\mathbf{L}}_o, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \omega \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \text{tg} \delta, \quad \tilde{\mathbf{C}}, \quad (16)$$

при цьому матриці $\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{G}}$ є частотно залежні. Звідси безпосередньо можна обчислити первинні параметри $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{R}} + i\omega\tilde{\mathbf{L}}$ та $\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{G}} + i\omega\tilde{\mathbf{C}}$.

Обчислення вторинних параметрів багатопровідної лінії. Вторинні параметри багатопровідної лінії знаходять як розв'язки задач про власні значення і власні вектори (1), тобто шляхом діагоналізації матриць $\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Y}}$ та $\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}}$. Можливість такої діагоналізації з довільно малою похибкою шляхом використання числових методів гарантована теоремою апроксимації навіть за наявності кратних власних значень [4, с. 229]. Матриці перетворень, які здійснюють діагоналізацію:

$$\hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{\Gamma}^2, \quad \hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{\Gamma}^2, \quad (17)$$

– це матриці, складені з власних векторів напруг і струмів мод багатопровідної лінії,

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_1 \quad \hat{\mathbf{u}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{u}}_M], \quad \hat{\mathbf{I}} = [\hat{\mathbf{i}}_1 \quad \hat{\mathbf{i}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{i}}_M],$$

де індекс біля кожного власного вектора означає порядковий номер моди і відповідає індексу відповідного власного значення γ_k^2 – діагонального елемента матриці власних значень $\mathbf{\Gamma}^2$, тобто квадрата коефіцієнта поширення k -ї моди в лінії; k -й власний вектор напруги або струму описує відносний розподіл напруги (відповідно струму) k -ї моди на провідниках багатопровідної лінії:

$$\hat{\mathbf{u}}_k = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{Mk})^T, \quad \hat{\mathbf{i}}_k = (i_{1k}, i_{2k}, \dots, i_{Mk})^T.$$

Власні значення γ_k^2 попарно різні, якщо діелектричне заповнення поперечного перерізу багатопровідної лінії неоднорідне, що властиве лініям, які складаються з окремих круглих провідників у круглій діелектричній ізоляції.

Матриці $\hat{\mathbf{U}}$ або $\hat{\mathbf{I}}$ унітарні тоді і тільки тоді, коли матриці $\tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}$ та відповідно $\tilde{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}$ нормальні [4], тобто, коли

$$(\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Y}}) \cdot (\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Y}})^H = (\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Y}})^H \cdot (\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Y}}), \quad (\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}}) \cdot (\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}})^H = (\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}})^H \cdot (\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Z}}),$$

де позначка « H » означає ермітове спряження. Однак обчислення для багатьох варіантів розташування провідників у поперечному перерізі багатопровідної лінії показують, що умова нормальності здебільшого не виконується, тому загалом матриці $\hat{\mathbf{U}}$ та $\hat{\mathbf{I}}$ не можна вважати унітарними. Для оцінки відхилення матриці $\hat{\mathbf{U}}$ від унітарної використано матричну p -норму для $p = \infty$, тобто $\|\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^H - \mathbf{1}\|_{\infty}$, і для випадку 8-провідного кабеля UTP отримано значення, близьке до 0.01. Цей висновок важливий під час обчислення матриць схемних параметрів відрізків багатопровідних ліній, де присутні операції обергання матриць $\hat{\mathbf{U}}$ та $\hat{\mathbf{I}}$.

Власні вектори як розв'язки задач (1) визначені з точністю до постійного множника, так що матриці $\hat{\mathbf{U}} \leftarrow \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{N}_U$, $\hat{\mathbf{I}} \leftarrow \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{N}_I$, де \mathbf{N}_U та \mathbf{N}_I – це діагональні матриці, побудовані з довільних нормуючих множників, теж є розв'язками задач (1). Дійсно, здійснивши підстановку $\hat{\mathbf{U}} \leftarrow \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{N}_U$ у перше зі співвідношень (17), бачимо, що

$$(\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{N}_U)^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot (\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{N}_U) = \mathbf{N}_U^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{N}_U = \mathbf{N}_U^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}^2 \cdot \mathbf{N}_U = \mathbf{\Gamma}^2,$$

бо матриці \mathbf{N}_U і $\mathbf{\Gamma}^2$ діагональні. Аналогічний результат можна одержати для другого із співвідношень (17). Транспонуючи перше зі співвідношень (17) і порівнюючи з другим, отримаємо

$$\hat{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Z}}^T (\hat{\mathbf{U}}^{-1})^T = \hat{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Z}} (\hat{\mathbf{U}}^{-1})^T = \mathbf{\Gamma}^2 = \hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{I}},$$

тобто матриці власних векторів $\hat{\mathbf{U}}$ та $\hat{\mathbf{I}}$ можуть бути вибрані так, щоб задовольняти співвідношення

$$\hat{\mathbf{I}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}^T, \quad (18)$$

тому достатньо один раз розв'язати одну з задач (1). У цьому випадку матриці хвильових модових опорів \mathbf{Z}_m або провідностей \mathbf{Y}_m слід обчислити на підставі телеграфних рівнянь [5] за такими співвідношеннями [6]:

$$\mathbf{Y}_m = \Gamma^{-1} \cdot \left(\hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \right) = \left(\hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}} \right) \cdot \Gamma = \mathbf{Z}_m^{-1}. \quad (19)$$

Ці матриці визначають відношення комплексних амплітуд прямих (або зворотних з урахуванням знака «мінус») хвиль напруг і струмів відповідної моди:

$$\mathbf{u}^{m+}(z) = \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{i}^{m+}(z), \quad \mathbf{i}^{m+}(z) = \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{u}^{m+}(z).$$

Автори у [5] вважають матриці \mathbf{Z}_m та \mathbf{Y}_m діагональними, обмежуючись твердженням про незалежне поширення мод і не наводячи математично чіткого доказу цього. З виразів (19) і (20) випливає, що для діагональності \mathbf{Z}_m та \mathbf{Y}_m достатньо, щоб матриці $\hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{I}}$ або $\hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{U}}$ були діагональними, бо Γ діагональна за означенням, а добуток двох діагональних матриць – це діагональна матриця. Це означає, що перетворення $\tilde{\mathbf{Z}}^m = \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{I}}$ повинно діагоналізувати матрицю $\tilde{\mathbf{Z}}$, а перетворення $\tilde{\mathbf{Y}}^m = \hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{U}}$ – матрицю $\tilde{\mathbf{Y}}$. При цьому, згідно з [5], матриці $\tilde{\mathbf{Z}}^m$ та $\tilde{\mathbf{Y}}^m$ слід трактувати як модові матриці погонних опорів та провідностей відповідно. Обчислення, здійснені автором для 8-провідної лінії типу UTP, підтверджують переважання діагональних елементів цих матриць над позадіагональними щонайменше на 10 порядків, так що можливе відхилення від діагональності лежить у межах можливих похибок обчислень. Цей результат підтверджує припустимість твердження про діагональність \mathbf{Z}_m та \mathbf{Y}_m щонайменше для практичних потреб.

Характеристичні опори і провідності \mathbf{Z}_c та \mathbf{Y}_c описані комплексними квадратними (недіагональними) матрицями:

$$\mathbf{Z}_c = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} = \mathbf{Y}_c^{-1}; \quad (21)$$

$$\mathbf{Y}_c = \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} = \mathbf{Z}_c^{-1}. \quad (22)$$

Можна вважати, що їх елементи виражають співвідношення між компонентами нормованих власних векторів $\hat{\mathbf{U}} \sqrt{\mathbf{Z}_m}$ та $\hat{\mathbf{I}} \sqrt{\mathbf{Y}_m}$. Матриці характеристичних опорів та провідностей симетричні, оскільки з урахуванням співвідношення (18) бачимо, що

$$\mathbf{Z}_c^T = \left(\hat{\mathbf{I}}^{-1} \right)^T \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \hat{\mathbf{U}}^T = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} = \mathbf{Z}_c.$$

Обчислення схемних параметрів багатопровідної лінії. Схемні параметри М+М-полюсника, еквівалентного відрізка М-провідної лінії завдовжки l можна виразити в системах хвильових або класичних параметрів стосовно комплексних амплітуд модових напруг \mathbf{u}^m і струмів \mathbf{i}^m або фізичних напруг \mathbf{u} та струмів \mathbf{i} на полюсах. Напруги і струми у довільній точці z багатопровідної лінії можна виразити як суперпозицію прямих і зворотних хвиль напруги $\mathbf{u}^{m+}(z)$, $\mathbf{u}^{m-}(z)$ або струму $\mathbf{i}^{m+}(z)$, $\mathbf{i}^{m-}(z)$, а вказані хвилі – подати як суперпозицію М власних хвиль – мод багатопровідної лінії:

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}^+(z) + \mathbf{u}^-(z) = \hat{\mathbf{U}} \cdot \left(\mathbf{u}^{m+}(z) + \mathbf{u}^{m-}(z) \right) = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u}^m(z); \quad (23)$$

$$\mathbf{i}(z) = \mathbf{i}^+(z) + \mathbf{i}^-(z) = \hat{\mathbf{I}} \cdot \left(\mathbf{i}^{m+}(z) + \mathbf{i}^{m-}(z) \right) = \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \left(\mathbf{u}^{m+}(z) - \mathbf{u}^{m-}(z) \right) = \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{i}^m(z). \quad (24)$$

Співвідношення між модовими амплітудами прямих і зворотних хвиль напруги можна описати модовою матрицею розсіяння \mathbf{S}^m :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{m-} \\ \mathbf{u}_2^{m+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^m & \mathbf{S}_{12}^m \\ \mathbf{S}_{21}^m & \mathbf{S}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{m+} \\ \mathbf{u}_2^{m-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \exp \mathbf{G}^{-1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{m+} \\ \mathbf{u}_2^{m-} \end{bmatrix} \quad (25)$$

або модовою матрицею передачі \mathbf{T}^m :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{m+} \\ \mathbf{u}_1^{m-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^m & \mathbf{T}_{12}^m \\ \mathbf{T}_{21}^m & \mathbf{T}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^{m+} \\ \mathbf{u}_2^{m-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^{m+} \\ \mathbf{u}_2^{m-} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де $\exp \mathbf{G} = \text{diag}[\exp(\gamma_1 l) \quad \exp(\gamma_2 l) \quad \dots \quad \exp(\gamma_M l)]$, а $\exp \mathbf{G}^{-1}$ – матриця, обернена до неї.

Вирази для матриць каскадних параметрів \mathbf{A} , параметрів провідності \mathbf{Y} та опору \mathbf{Z} можна отримати, обчислюючи амплітуди мод напруг і струмів на полюсах відрізка багатопровідної лінії на підставі співвідношень (23) і (24).

Для матриці модових параметрів \mathbf{A}^m

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^m \\ \mathbf{i}_1^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^m & \mathbf{A}_{12}^m \\ \mathbf{A}_{21}^m & \mathbf{A}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^m \\ \mathbf{i}_2^m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{Y}_m & -\mathbf{Y}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z}_m \\ \mathbf{1} & -\mathbf{Z}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^m \\ \mathbf{i}_2^m \end{bmatrix}$$

або

$$\mathbf{A}^m = \begin{bmatrix} \text{ch} \mathbf{G} & \text{sh} \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_m \\ \mathbf{Y}_m \cdot \text{sh} \mathbf{G} & \text{ch} \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \mathbf{G} & \mathbf{Z}_m \cdot \text{sh} \mathbf{G} \\ \text{sh} \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y}_m & \text{ch} \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

оскільки усі матриці-клітки у цих виразах діагональні, при цьому діагональні елементи матриць $\text{ch} \mathbf{G}$ і $\text{sh} \mathbf{G}$ – це значення функцій $\text{ch}(\gamma_i l)$ і $\text{sh}(\gamma_i l)$, $i = \overline{1, M}$.

Матриця модових параметрів провідності \mathbf{Y}^m описує перетворення подібності між матрицями хвильових модових провідностей і матрицею провідностей відрізка багатопровідної лінії:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^m \\ \mathbf{i}_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^m & \mathbf{Y}_{12}^m \\ \mathbf{Y}_{21}^m & \mathbf{Y}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^m \\ \mathbf{u}_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \exp \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \exp \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^m \\ \mathbf{u}_2^m \end{bmatrix}.$$

Виконавши операції між матрицями-співмножниками, отримаємо остаточний вираз для матриці \mathbf{Y} -параметрів (для зустрічного напрямку стрілкування):

$$\mathbf{Y}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_m \cdot \text{cth} \mathbf{G} & -\mathbf{Y}_m \cdot \text{sh} \mathbf{G}^{-1} \\ -\mathbf{Y}_m \cdot \text{sh} \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{Y}_m \cdot \text{cth} \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

У подібний спосіб для модової матриці повних опорів відрізка багатопровідної лінії \mathbf{Z}^m отримаємо:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^m \\ \mathbf{u}_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \exp \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_m \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \exp \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^m \\ \mathbf{i}_2^m \end{bmatrix},$$

тобто

$$\mathbf{Z}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \exp \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Z}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \exp \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1},$$

це матриця модових повних опорів для прохідного напрямку стрілкування. Цей вираз описує перетворення подібності між матрицями хвильових модових опорів і матрицею \mathbf{Z} -параметрів відрізка багатопровідної лінії. Здійснивши перетворення у цьому виразі та змінивши напрям стрілкування на зустрічний, отримаємо остаточно

$$\mathbf{Z}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m \cdot \text{cth} \mathbf{G} & \mathbf{Z}_m \cdot \text{sh} \mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{Z}_m \cdot \text{sh} \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{Z}_m \cdot \text{cth} \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

У виразах (28) і (29) $\text{cth} \mathbf{G} = \text{diag}[\text{cth}(\gamma_1 l) \quad \text{cth}(\gamma_2 l) \quad \dots \quad \text{cth}(\gamma_M l)]$.

Матриці-клітки у виразах для модових схемних параметрів діагональні, тому їх добутки комутативні. Окрім того, ця діагональність забезпечує симетрію матриць \mathbf{S}^m , \mathbf{Y}^m та \mathbf{Z}^m .

Для переходу від модових амплітуд до напруг і струмів на полюсах відрізка лінії необхідно використати співвідношення (23) і (24). На цій підставі отримуємо матрицю розсіювання \mathbf{S}^u для описання взаємозв'язків між комплексними амплітудами прямих і зворотних хвиль напруги:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^- \\ \mathbf{u}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^u & \mathbf{S}_{12}^u \\ \mathbf{S}_{21}^u & \mathbf{S}_{22}^u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^+ \\ \mathbf{u}_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \exp \mathbf{G}^{-1} \\ \exp \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^+ \\ \mathbf{u}_2^- \end{bmatrix}$$

або

$$\mathbf{S}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \\ \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (30)$$

та матрицю пересилання \mathbf{T}^u :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^+ \\ \mathbf{u}_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^+ \\ \mathbf{u}_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^u & \mathbf{T}_{12}^u \\ \mathbf{T}_{21}^u & \mathbf{T}_{22}^u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^+ \\ \mathbf{u}_2^- \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^u = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \cdot \exp \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \exp \mathbf{G}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Для матриць класичних схемних параметрів з урахуванням співвідношень (21) і (22) отримуємо

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^m & \mathbf{A}_{12}^m \\ \mathbf{A}_{21}^m & \mathbf{A}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}$$

або

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \\ \hline \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{shG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_c \\ \hline \mathbf{Y}_c \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{chG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{array} \right], \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ -\mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^m & \mathbf{Y}_{12}^m \\ \mathbf{Y}_{21}^m & \mathbf{Y}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

або

$$\mathbf{Y} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & -\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \\ \hline -\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_c \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & -\mathbf{Y}_c \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \\ \hline -\mathbf{Y}_c \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{Y}_c \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \end{array} \right], \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11}^m & \mathbf{Z}_{12}^m \\ \mathbf{Z}_{21}^m & \mathbf{Z}_{22}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ -\mathbf{i}_2 \end{bmatrix}$$

або

$$\mathbf{Z} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \\ \hline \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} & \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_c \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} & \mathbf{Z}_c \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \\ \hline \mathbf{Z}_c \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{shG}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} & \mathbf{Z}_c \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \end{array} \right]. \quad (34)$$

З використанням рівності (18) легко перекопати, що матриця \mathbf{S}^u несиметрична, а матриці \mathbf{Y} та \mathbf{Z} симетричні стосовно головної діагоналі. Обчислюючи значення \mathbf{S}_{12}^{uT} на підставі виразу (30), отримуємо

$$\mathbf{S}_{12}^{uT} = (\hat{\mathbf{U}}^{-1})^T \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^T = \hat{\mathbf{I}} \cdot \exp \mathbf{G}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} = \mathbf{S}_{12}^i,$$

тобто відповідну клітку матриці розсіювання струмів \mathbf{S}^i [7], а не клітку \mathbf{S}_{21}^{uT} . Натомість для матриці провідностей (33)

$$\mathbf{Y}_{11}^T = (\hat{\mathbf{U}}^{-1})^T \cdot \mathbf{cthG} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \hat{\mathbf{I}}^T = \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{cthG} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} = \mathbf{Y}_{11}$$

подібні результати можна отримати для інших кліток цієї матриці, ствердивши, що $\mathbf{Y}_{12}^T = \mathbf{Y}_{21}$, $\mathbf{Y}_{22}^T = \mathbf{Y}_{22}$, а тому загалом $\mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}$. Аналогічно з виразів (34) і (18) випливає $\mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}$.

Симетрію матриці розсіяння можна відновити, впровадивши нормування хвиль напруги і струму стосовно характеристичних опорів і провідностей:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{Y}_c} \mathbf{u}; \quad \tilde{\mathbf{i}} = \sqrt{\mathbf{Z}_c} \mathbf{i}. \quad (35)$$

Для обчислення вказаних арифметичних квадратних коренів доцільно використати ітераційний процес [8]:

$$\mathbf{P}_{k+1} = 0.5 \cdot (\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k^{-1}), \quad \mathbf{Q}_{k+1} = 0.5 \cdot (\mathbf{Q}_k + \mathbf{P}_k^{-1})$$

з початковим наближенням $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Y}_c$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{1}$. При цьому процес квадратично збігається до $\mathbf{P}_k = \sqrt{\mathbf{Y}_c}$, $\mathbf{Q}_k = \sqrt{\mathbf{Z}_c}$.

Застосовуючи означення (35) до прямих та зворотних хвиль напруги, отримуємо для S-параметрів

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1^- \\ \tilde{\mathbf{u}}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{Y}_c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Y}_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \\ \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{Z}_c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Z}_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1^+ \\ \tilde{\mathbf{u}}_2^- \end{bmatrix}$$

або

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{Y}_c} \cdot \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \sqrt{\mathbf{Z}_c} \\ \hline \sqrt{\mathbf{Y}_c} \cdot \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \sqrt{\mathbf{Z}_c} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (36)$$

Ця матриця симетрична, оскільки з урахуванням (18) і симетрії матриць \mathbf{Z}_c та \mathbf{Y}_c :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{12}^T = \left(\sqrt{\mathbf{Y}_c} \cdot \hat{\mathbf{U}} \exp \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \sqrt{\mathbf{Z}_c} \right)^T = \sqrt{\mathbf{Z}_c} \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \exp \mathbf{G}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \sqrt{\mathbf{Y}_c},$$

а на підставі виразів (21) і (22)

$$\sqrt{\mathbf{Z}_c} \cdot \hat{\mathbf{I}} = \sqrt{\mathbf{Y}_c} \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Z}_m, \quad \hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \sqrt{\mathbf{Y}_c} = \mathbf{Y}_m \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \sqrt{\mathbf{Z}_c},$$

звідки випливає $\tilde{\mathbf{S}}_{12}^T = \tilde{\mathbf{S}}_{21}$, тобто симетрія матриці розсіяння $\tilde{\mathbf{S}}$.

На підставі вищенаведених співвідношень для схемних параметрів відрізка регулярної багатопровідної лінії за заданих параметрів джерел і навантажень безпосередньо можна обчислити усі потрібні робочі параметри і характеристики у частотній області.

Висновки:

1. Запропонована схема побудови математичної моделі відрізка регулярної багатопровідної лінії, яка може наближено, але якісно правильно відтворити залежності її характеристик від геометрії поперечного перерізу, розмірів, електричних параметрів діелектриків та провідників, а також від частоти в діапазоні значень параметрів лінії, які відповідають поширенню в ній хвиль основного типу.

2. На підставі методу конформних відображень отримано співвідношення для розрахунку власних і взаємних ємнісних коефіцієнтів для випадку багатопровідної лінії з круглими провідниками, покритими круглою циліндричною ізоляцією.

3. На підставі насамперед відомих співвідношень наведено схему побудови матриць первинних параметрів багатопровідної лінії.

4. Згідно з наведеними співвідношеннями ми обґрунтували деякі властивості матриць вторинних параметрів лінії.

5. Наведені співвідношення для обчислення схемних параметрів відрізка багатопровідної лінії у найпоширеніших класичних і хвильових системах стосовно модових і звичайних напруг та струмів або хвильових амплітуд.

1. Frühauf H., Wiegmann F. *Lösungen der Aufgaben zu S. Ramo, J. R. Whinnery. Felder und Wellen in der modernen Funktechnik.* – Berlin, VEB Verlag Technik, 1961. – 555 с. 2. Никольский В.В.,

Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. –544 с. 3. Шимони К. Теоретическая электротехника / Под ред. К.М. Поливанова. –М.: Мир, 1964. – 773 с. 4. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Пер. с англ.; Под ред. В.Б. Лидского. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 352 с. 5. D.F. Williams, L.A.Hayden, R.B. Marks. A complete multimode equivalent-circuit theory for electrical design. – J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. – 102. – 1997. – P. 405–423. 6. Павликевич М.Й. Режим узгодження і перехресні зв'язки у багато-провідних лініях // Вісник НУ «Львівська політехніка» «Радіоелектроніка та телекомунікації». – 2009. – № 645. – С. 3–12. 7. Павликевич М.Й. Схемні параметри багатопровідних ліній // Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. –К., 2007. – Вип. 42. – С. 125–137. 8. Cheng S.H., Higham N.J., Kenney C.S., Laub A.J. Approximating the logarithm of a matrix to specified accuracy. – SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 22 (4). – P. 1112–1125.

УДК 621.372.

Й.А. Захарія

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра радіотехнічних пристроїв і систем

МОДЕЛЮВАННЯ НЕКООРДИНАТНИХ НИТКОПОДІБНИХ СТРУКТУР У ХВИЛЕВОДАХ

© Захарія Й.А., 2010

На основі числових прикладів розглянуто проблему моделювання некоординатних ниток струму, розташованих у порожнистих хвильоводах. Встановлено загальні вимоги до реалізації моделювання шляхом ділення довжини нитки струму і формування елементарних координатних відрізків. Проаналізовано об'ємні провідні неоднорідності у хвильоводах.

Use the numerical examples the modeling problem of noncoordinate current filament, located in the empty waveguide, is considered. The general requirements for modeling by filament length division and elementary coordinate segments forming, are established. The proposed bellow modification of finite-element-method is in analysis of conducting waveguide discontinuity filament model useful.

Вступ. Ниткоподібні структури часто використовуються під час моделювання провідних неоднорідностей у хвильоводах [2, 5, 7]. НВЧ-аналіз за допомогою такого моделювання, як відомо, може бути застосований у випадках, коли точні методи електродинамічного аналізу непридатні [3]. Під час моделювання провідна неоднорідність у хвильоводі замінюється ниткоподібною структурою, аналіз якої стає доступним. При цьому, однак, звичайно виникає проблема некоординатності, тобто ситуація, у якій поле випромінювання ниток електричного струму треба було б записувати в іншій системі координат, як поле у хвильоводі. Причиною некоординатності, наприклад у прямокутному хвильоводі, буває некоординатне розташування прямолінійної нитки струму або її криволінійна форма.

Сьогодні невідомий єдиний метод розв'язання названої вище електродинамічної задачі. Інколи вдається пристосувати (спростити) функцію Гріна до іншої системи координат [6]. Універсальним методом, придатним для довільного хвильовода за різного розташування і форми нитки струму, може бути ділення нитки струму на достатньо короткі відрізки. Такий метод є модифікацією відомого методу скінченних елементів для лінійних елементів [1]. Зауважимо, що до ділення нитки струму часто змушує запис функцій Гріна у вигляді сум нескінченних рядів. Застосування такого методу для аналізу некоординатних ниткоподібних структур розглядає ця робота.