Издательский дом "Питер", 2002, 608 с. 4. О.В. Лазоренко, С.В. Лазоренко, Л.Ф. Черногор. Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 2. Аналитическое и дискретное вейвлет-преобразования. Радиофизика и радиоастрономия, 2007, т. 12, №3. – С. 278–294. 5. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р. – 2002. – 448 с. 6. Гурвич А.К., Довнар Б.П., Козлов В.Б. и др. Дефектоскопия рельсов. – М.: Транспорт, 1978. – 440 с.

УДК 621.39

О.Б. Новікова
Криворізький національний університет

ФРАКТАЛЬНИЙ СПЛАЙН – МОДЕЛЬ ШИРОКОСМУГОВОГО СИГНАЛУ

Розроблено методику побудови фрактального сплайна для генерування завадостійких сигналів та проведено комп'ютерне моделювання адекватності такого сигналу.
Ключові слова: фрактальний сплайн, фрактальний сигнал, завадостійкий сигнал.

There is represented a method of spline building to generate fractal noise-immune signals and executed computer simulations of the signal adequacy compared to ordinary cubic spline.
Key words: fractal spline, fractal signal, noise-immune signal.

Постановка задачі та її зв'язок з науковими проблемами. Сьогодні все актуальнішим стає питання надійної експлуатації ефірних засобів зв'язку, призначених для роботи у складному електромагнітному оточенні, зокрема систем бездротових комп'ютерних мереж. Це пов'язано зі зростанням електромагнітних шумів, що негативно впливають на середовище та функціональні елементи комунікаційних каналів. Такими шумами є атмосферні перешкоди, індустріальні шуми, а також міжсистемні перешкоди. Тому під час розроблення нових радіотехнічних засобів зв'язку важливою є задача забезпечення достатнього рівня завадостійкості сигналів, що передаються. Один із можливих напрямів розв'язання цієї задачі – використання у системах зв'язку сигналів фрактального типу. Серед великого різноманіття фракталів зупинимося на фрактальних сплайнах. У роботі ставиться задача синтезу фрактального сплайна з мінімальним числом параметрів, а також розроблення методу оцінювання цих параметрів за наявності завад.

Аналіз публікацій. Вперше питання про властивості фрактальних сигналів і способи їх генерації розглядали А.П. Кузнєцов та С.П. Кузнєцов. Основні напрацювання в галузі застосування фракталів для розв'язання радіофізичних та телекомунікаційних задач належать А.А. Потапову, В.Ф. Кравченко, О.І. Шелухіну, А.В. Осіну, С.М. Смольському. Відомо декілька видів фрактальних сигналів: сигнали, модульовані фрактальними послідовностями (А.А. Потапов), фрактальні вейвлети (В.М. Болотов, Ю.В. Ткач [4]), фрактальні надширокополосні радіоімпульси (О.В. Лазоренко, Л.Ф. Черногор), сигнали з адитивною фрактальною структурою (А.В. Хандурін [5]) та ін. Однак ці фрактальні сигнали важко реалізуються на практиці.

Отже, існує потреба в розробленні нового типу сигналу з фрактальною структурою, що має такі властивості: велика інформаційна місткість, простота генерування, легкість модифікації для використання у різних галузях (радіоелектроніка, економіка, комп'ютерна графіка тощо).

Цілі і мета роботи. Метою роботи є розроблення і дослідження нового класу фрактальних сигналів у базисі ермітових сплайнів, модифікація його параметрів для покращення характеристик сигналу, аналіз можливих шляхів використання.

Основні цілі роботи:

1. Дослідження основних властивостей фрактальних сплайнів, доведення їх адекватності при застосуванні до задач з фрактальними сигналами, виявлення їх переваг і недоліків.
2. Розроблення нового методу побудови фрактальних сплайнів, що забезпечує легкість, гнучкість та обчислювальну ефективність.
3. Модифікація параметрів фрактального сплайна та порівняння його властивостей.
4. Проведення комп'ютерного експерименту з генерування фрактального сигналу та оцінювання його характеристик.

Фрактальні сплайни. Фрактальний сплайн – це функція, що складається зі сплайн-функцій різного масштабу, що зберігають самоподібність [2, с.162]. Як і звичайний сплайн, фрактальний сплайн характеризується ступенем, кількістю вузлів, крайовими умовами. Від фракталу він перейняв такі характеристики, як кількість масштабів і фрактальна розмірність.

Масштабом називатимемо кількість вкладених рівнів самоподібних сплайнів.

Для того, аби сплайн став фракталом, необхідно, щоб кожен із R фрагментів також був сплайном, подібним до оригінального [1, с.102]. Тоді сплайн на k-му масштабі складатиметься з R^k фрагментів. Поділ кожного фрагмента сплайна зберігає пропорцію нульового масштабу (рис. 1).

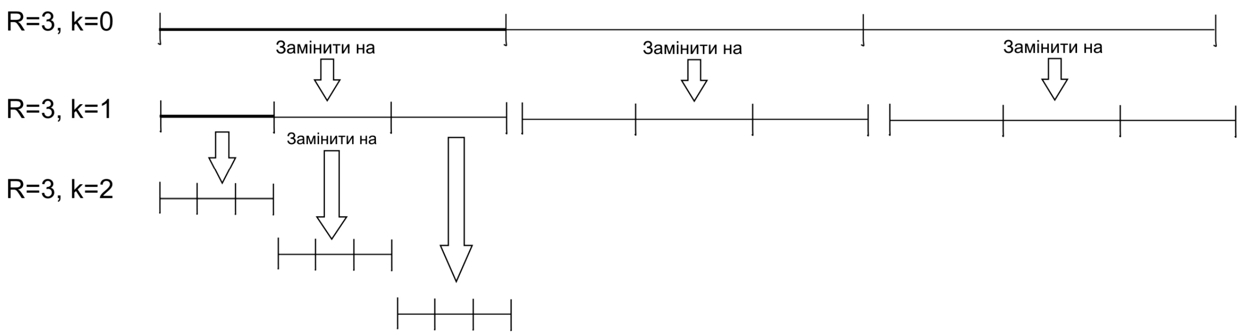

Рис. 1. Поділ фрагментів фрактального сплайна

Властивості фрактального сплайна:

1. Складається з фрагментів – фрактальних функцій, що відрізняються лише своїми параметрами.
2. Неперервність похідних і значень у точках стикування забезпечується, якщо сплайн періодичний, тобто значення у першому й останньому вузлах однакові.
3. Сплайн симетричний, якщо фрагменти мають однакову ширину.

Переваги фрактальних сплайнів:

1. Краще наближують складні природні процеси, ніж інші математичні моделі.
2. Простота та стійкість розрахунків.
3. Гнучкість параметрів – можливість отримувати сплайни різного виду і характеристик.

Побудова фрактальних сплайнів. Нехай маємо ермітів сплайн, що на інтервалі $x \in [a;b]$ задається поліномом

$$S(x) = \sum_{j=0}^{R} a_j H_j(x), \tag{1}$$

де a_j – числові коефіцієнти, що дорівнюють значенню сплайна у вузлах; $H_j(x)$ – базисні ермітові сплайни, R – кількість фрагментів сплайна.

Нехай ${}^0S(x)$ – сплайн нульового масштабу, розрахований за (1). Тоді сплайн k-го масштабу на фрагменті $(q_0, q_1,..., q_k)$ позначимо як

$$ {}^kS_{q0,q1,...,qk}(x) = m_k \times {}^0S(x)\ , \tag{2} $$

де m_k – масштабний множник.

Фрактальний сплайн на відрізку $[a;b]$ масштабу k є послідовною сукупністю сплайнів виду (2). Позначимо такий сплайн як

$$ {}^kS(x) = \begin{cases} {}^kS_{q1,...,1}(x), x \in [a, x_1), \\ {}^kS_{q1,...,2}(x), x \in [x_1, x_2), \\ ... \\ {}^kS_{q1,...,R}(x), x \in [x_{n-1}, b), \\ 0, x \notin [a, b] \end{cases} \tag{3} $$

або

$$ {}^kSf(x) = \sum_{j=0}^{k} {}^jS(x)\,. \tag{4} $$

Завдяки тому, що на кожному масштабі й на кожному фрагменті числові коефіцієнти a_j з (1) залишаються однаковими, вираз (4) можна записати як

$$ {}^kSf(x) = \sum_{j=0}^{R} a_j\, {}^kHf(x)\,, \tag{5} $$

де ${}^kHf(x)$ – фрактальний ермітів базисний сплайн з глибиною масштабу k.

Перепишемо (5) в матричному вигляді

$$ S = Hf * A\,, \tag{6} $$

де Hf – матриця планування, A – матриця коефіцієнтів.

Значення j-го стовпця матриці Hf є значеннями j-ї функції форми $Hf_j(x)$ для $x \in [a;b]$. Внаслідок локальних властивостей функції форми матриця Hf є блочно-діагональною [6].

Фрактальна матриця планування є самоподібною [6, с. 111]. Матриця k-го масштабу є копією матриці *(k-1)*-го масштабу, зменшена в *1/R* раза (рис. 2).

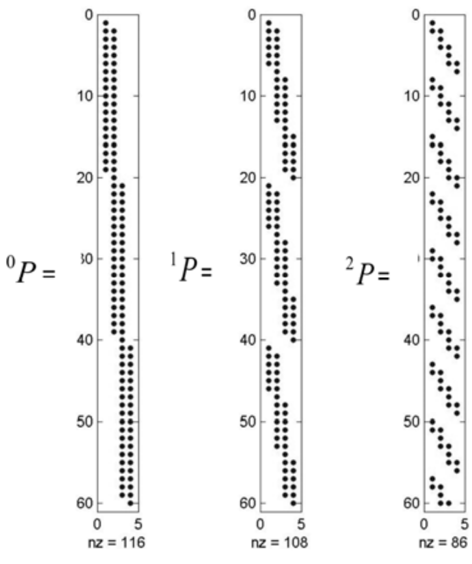

Рис. 2. Внутрішня структура матриць планування:
а – нульового масштабу; б – першого масштабу; в – другого масштабу

Загальний вигляд фрактальних базисів для рівномірної сітки наведено на рис. 3.

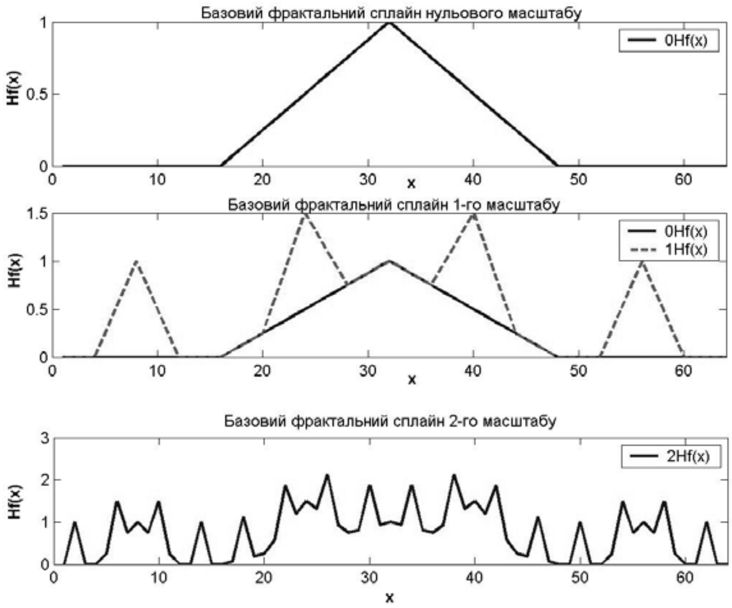

Рис. 3. Фрактальні базисні сплайни: а – нульового масштабу; б – першого масштабу; в – другого масштабу

Розглянемо процес отримання фрактального сплайна *k*-го масштабу зі сплайна *(k-1)*-го масштабу. Нехай на нульовому масштабі маємо:

$$^{0}TU = [x_{0,0}, x_{1,0}, ..., x_{n,0}], \tag{7}$$

де $x_{i,j}$ – *i*-й вузол сплайна, *j* – масштаб.

Замінимо кожний фрагмент $[x_{i,j}; x_{i+1,j}]$ на сплайн з вузлами:

$$^{1}TU = [a, x_{1,1}, x_{2,1}, ..., b], \tag{8}$$

причому $a = x_{0,1} = x_{0,0}$, $b = x_{n,1} = x_{1,0}$, тобто крайові вузли сплайна 1-го масштабу збігаються з вузлами 1-го фрагмента сплайна нульового масштабу.

На *k*-му масштабі матриця вузлів має вигляд:

$$^{k}TU = [x_{0,k}, x_{1,k}, ..., x_{R^k+1,k}]. \tag{9}$$

Проміжні вузли отримують за пропорцією розміщення вузлів на попередньому масштабі:

$$w_{i,k-1} = \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{x_{n,k-1} - x_{0,k-1}}, \tag{10}$$

$$x_{i,k} = x_{i,k-1} * w_{i,k-1}. \tag{11}$$

Практична реалізація фрактальних сплайнів. Розглянемо побудову лінійного фрактального сплайна з глибиною масштабу *k=2* на дискретній множині точок. Значення фрактального сплайна вважатимемо фрактальним сигналом.

Припустімо, що досліджувана множина точок обмежена інтервалом [1;64] і утворена деякою лінійною функцією з вузлами у точках (0;0), (16;1), (32;-1), (48;1), (64;0). Отже, сплайн нульового масштабу матиме *R=4* фрагменти.

Використавши формули (1)-(11), отримали лінійний фрактальний сплайн (рис. 4). Фрактальна розмірність для $^{2}S(x)$ за методикою [3, с.418] дорівнює D_f = 1.5284.

Якщо як базисний взяти не лінійний, а кубічний сплайн, то отримаємо результат, показаний на рис. 5. Фрактальна розмірність для кубічного фрактального сплайна $^{2}S(x)$ дорівнює D_f = 1.3635.

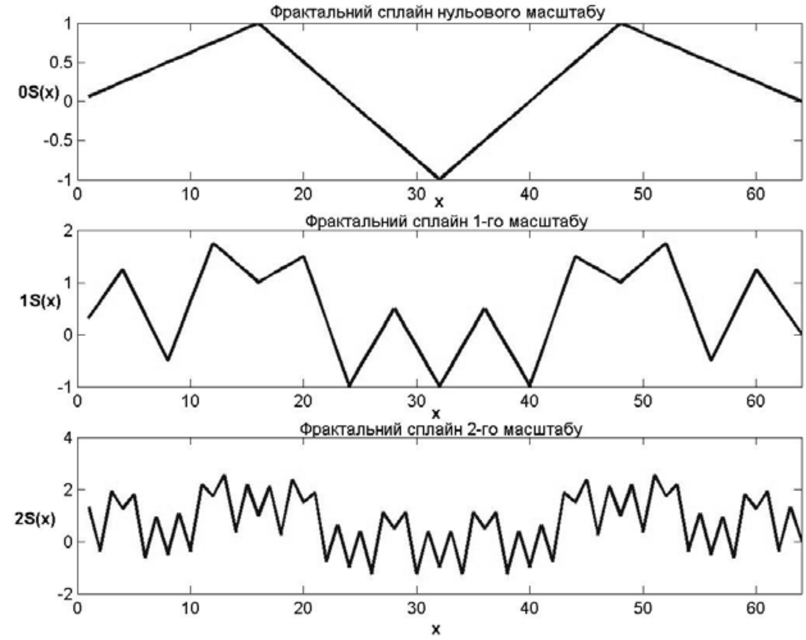

Рис. 4. Лінійний фрактальний сплайн з глибиною масштабу k=2.

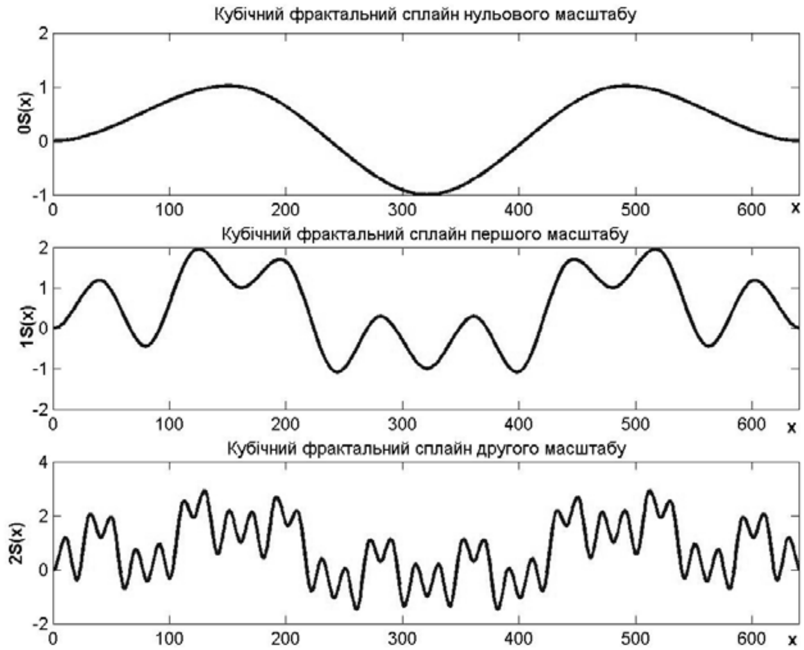

Рис. 5. Кубічний фрактальний сплайн з глибиною масштабу k=2

Варіації з параметрами сплайна, а саме нерівномірне розміщення вузлів на сітці і використання різних масштабних множників, дають змогу отримувати різні види фрактальних сигналів.

Для порівняння оцінкових характеристик фрактального сплайна та звичайного кубічного сплайна було проведено серію із 10 комп'ютерних експериментів. До фрактального сигналу, показаного на рис. 5, додавали білий шум з різними значеннями дисперсії. Середньоквадратичні значення похибок оцінювання параметрів сплайна показано на рис. 6. Як бачимо, оцінки для фрактального сплайна мають меншу похибку порівняно зі звичайним сплайном.

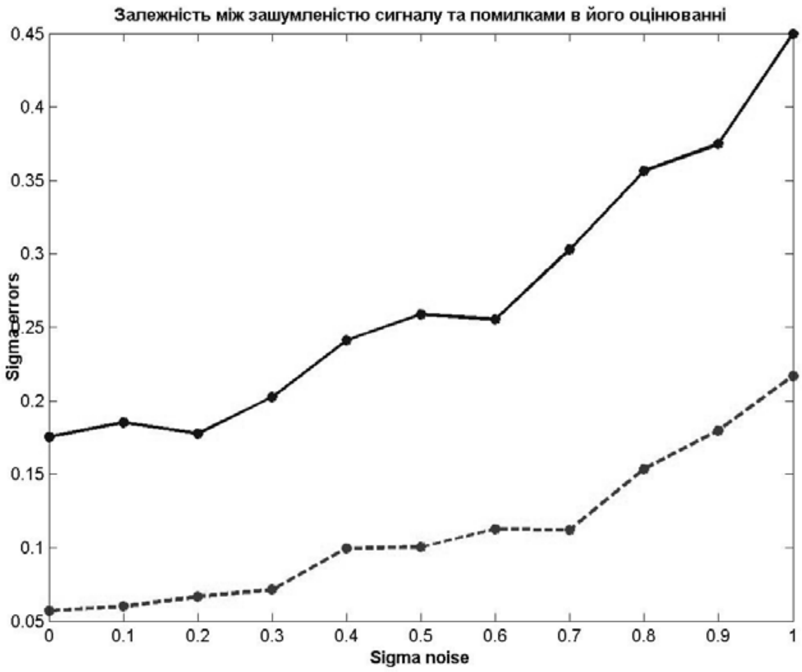

Рис. 6. Залежність між зашумленістю сигналу та помилками в його оцінюванні: суцільна лінія – звичайний кубічний сплайн,пунктирна лінія – фрактальний сплайн

Висновки і пропозиції. Отримані фрактальні сплайни дають змогу за малого числа лінійно залежних параметрів отримувати багатомасштабний сигнал складної форми. Завдяки багатомасштабності за мінімальної кількості параметрів енергія сигналу розосереджується в широкому діапазоні частот, що підвищує завадостійкість сигналу та дає змогу виявляти його при високому рівні завад.

Модель має широкі можливості до її розвитку й ускладнення, які можна використати для адаптації до реальних процесів. Зокрема це такі можливості, як:

1) використовувати на різних масштабах різні базисні сплайни (лінійні, параболічні, кубічні);
2) нерівномірно розміщувати фрагменти сплайна;
3) змінювати пропорції між фрагментами сплайна із масштабом;
4) застосовувати коефіцієнти амплітуди до різних масштабів;
5) змінювати схеми поділу фрагментів із масштабом.

1. Abry P., Goncalves P., Vehel J.-L. Scaling Fractals and Wavelets. – Wiley, 2009. – 504 p. 2. Navascues M.A., Sebastian M.V. Fractal Splines. Monografias del Seminario Matematico Garcia de Galdeano 33 (2006), p. 161-168. 3. Owen D.J., Yuan Shen. Estimating the Hurst index of a self-similar process via the crossing tree. Signal Processing Letters, 11, 2004, pp. 416-419. 4. Болотов В.Н., Ткач Ю.В. Выделение фрактальных сигналов в условиях сложной электромагнитной обстановки // Электромагнитные явления. – 2003. Т.3. – №2. – С. 211–227. 5. Хандурин А.В. Сигналы с аддитивной фрактальной структурой // Автореф. дис. – М., 2011. 6. Шелевицький І.В. Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. – Кривий Ріг: Європейський університет, 2002. – 304 с.