Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»

ГАВРИШ ВАСИЛЬ ІВАНОВИЧ

УДК 536.24

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СТРУКТУР ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Львів – 2013

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному університеті «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант доктор технічних наук, професор **Федасюк Дмитро Васильович**, Національний університет «Львівська політехніка», проректор з науково-педагогічної роботи, завідувач кафедри «Програмне забезпечення»

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор
Верлань Анатолій Федорович,
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ, завідувач відділу моделювання динамічних систем, член-кореспондент Академії педагогічних наук України, заслужений діяч науки і техніки України;

доктор технічних наук, доцент
Костіков Андрій Олегович,
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків, провідний науковий співробітник, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки;

доктор технічних наук, професор
Соколовський Ярослав Іванович,
Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, завідувач кафедри обчислювальної техніки і моделювання технологічних процесів

Захист відбудеться "______"______________ 2013 р. о _____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 Національного університету «Львівська політехніка», 79013, Львів-13, вул. С. Бандери, 12.
З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка», 79013, Львів-13, вул. Професорська, 1.

Автореферат розісланий "____"_____________ 2013 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Р.А. Бунь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Моделювання процесів теплопровідності є важливим розділом теоретичних і практичних досліджень. Побудова розв'язків для задач теплоперенесення має наукове, практичне та економічне значення. Температурні режими конструкцій пристроїв значною мірою визначають їхні якісні та кількісні параметри і характеризуються температурними полями або величинами, які визначаються з цих полів, а саме: значеннями абсолютних температур, перепадами температур у просторі і часі, поведінкою температури та її градієнтів на межових поверхнях та поверхнях спряження різнорідних елементів конструкцій пристроїв із довільно заданими крайовими умовами, часом встановлення заданого розподілу температур або її перепадів. Розподіл температурних полів у просторі та часі отримують, досліджуючи математичні моделі явища теплоперенесення як результат аналітичного або числового розв'язування чи проведення експерименту з фізичною моделлю. У деяких випадках математичне моделювання є єдиним джерелом інформації про температурні поля конструкцій пристроїв. Жодне з явищ перенесення не дає таких багатих і глибоких відомостей про коливання гратки, про збуджені стани електронів та їхню взаємодію з граткою в напівпровідниках, як теплопровідність.

Особливого значення для виробництва пристроїв сучасної техніки набувають композитні матеріали, серед яких важливе місце посідають кусково-однорідні структури (шаруваті структури, однорідні та шаруваті структури з чужорідними включеннями), які широко застосовуються в інтегральних сенсорах для моніторингу температури і вологості, світловипромінювальних елементах для динамічних світлодіодних підсвіток, температурних перетворювачах, селективних оптичних фільтрах тощо. Проектування наведених складних електронних, оптичних та електромеханічних систем кусково-однорідної структури, які часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, полягає не лише в оптимізації їхніх параметрів, але й у забезпеченні їхньої стабільної роботи, високої надійності та теплової стійкості. Із ростом потужностей та інтеграції таких систем ускладнюється проблема термостійкості до теплових навантажень їх конструкцій, які частково або цілком виходять із ладу в результаті теплових перевантажень.

Побудові математичних моделей та розвитку методів розв'язування задач теплообміну присвячено багато праць вітчизняних і закордонних вчених. В роботах О.Ликова описано лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для одно- та двовимірних однорідних і двошарових структур. Л. Коздоба у своїх працях розглядає лінійні моделі різної розмірності та нелінійні моделі для одновимірних однорідних систем. Я. Підстригач та Ю. Коляно демонстрували лінійні та нелінійні математичні моделі для кусково-однорідних структур із одновимірною неоднорідністю. Р. Кушнір та В. Попович вивчають лінійні моделі різної розмірності та нелінійні моделі для однорідних та шаруватих одновимірних тіл. Д. Федасюк та його учні розробили методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв, в яких закладено низку спрощень та припущень, що суттєво знижують точність отриманих результатів. Зокрема, в результаті моделювання температурних режимів у кристалах інтегральних схем проігноровано жорсткими виводами як чужорідними елементами. Не враховано також випадку, коли теплофізичні параметри матеріалів у певному інтервалі температур стають залежними від температури. Тому актуальною постала проблема вдосконалення існуючих і створення нових лінійних та нелінійних математичних моделей теплообміну для шаруватих, однорідних та шаруватих із чужорідними включеннями конструкційних елементів і нових ефективних методів розв'язування відповідних крайових задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу виконано за тематикою наукових досліджень кафедри програмного забезпечення Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій Національного університету "Львівська політехніка" в рамках науково-дослідних тем "Розробка методів та засобів розподілення обчислень в задачах теплового проектування електронних пристроїв нового покоління" (державний реєстраційний номер №0108U000331) та "Розробка лінійних та нелінійних математичних моделей і методів аналізу теплових режимів електронних пристроїв із неоднорідною структурою" (державний реєстраційний номер №0110U001121), в яких автор розробив лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи знаходження аналітично-числових розв'язків відповідних крайових задач для кусково-однорідних структур.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є створення нових лінійних та нелінійних математичних моделей процесу теплопровідності для кусково-однорідних структур та розроблення методів розв'язування відповідних крайових задач, що дає змогу точніше описати явище теплоперенесення, підвищити точність розрахунку температурних полів та ефективність методів проектування нових пристроїв сучасної техніки. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

1. Розробити лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних однорідних та шаруватих з чужорідним включенням структур.
2. Отримати аналітично-числові розв'язки лінійних крайових задач теплопровідності для двовимірних однорідних та шаруватих з чужорідним включенням структур.
3. Отримати аналітично-числові розв'язки нелінійних крайових задач теплопровідності для двовимірних термочутливих однорідних та шаруватих з чужорідним включенням структур із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційних матеріалів.
4. Розробити нелінійну математичну модель процесу теплопровідності для термочутливої тривимірної структури із малим чужорідним теплоактивним включенням та одержати наближений аналітичний розв'язок відповідної крайової задачі із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційних матеріалів.
5. Розробити нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних термочутливих шаруватих структур з локально зосередженими внутрішніми джерелами тепла та отримати аналітично-числові розв'язки відповідних крайових задач із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційних матеріалів.

6. Створити лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для тривимірних просторових структур із чужорідним теплоактивним малим та тонким включенням та одержати аналітично-числові розв'язки відповідних крайових задач.
7. Розробити алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу температурних режимів у кусково-однорідних структурах.

Об’єктом дослідження є процес теплопровідності для кусково-однорідних структур.

Предметом дослідження є лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності і методи знаходження аналітично-числових розв’язків відповідних крайових задач для кусково-однорідних структур.

Методи дослідження. Для створення лінійних та нелінійних математичних моделей процесу теплопровідності в кусково-однорідних структурах використано теорію узагальнених функцій і диференціальне та інтегральне числення, а для знаходження розв’язків відповідних крайових задач – теорію узагальнених та спеціальних функцій, інтегральні перетворення Фур’є та Ганкеля, методи розв’язування диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в обґрунтуванні та розв’язанні проблеми математичного моделювання температурних режимів в кусково-однорідних структурах, що дає змогу точніше описати явище теплоперенесення, підвищити точність розрахунку температурних полів та ефективність методів проектування нових пристроїв сучасної техніки, при цьому одержано такі нові результати:

1. Вперше розроблено лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур.
2. Вперше отримано аналітично-числові розв'язки в замкнутому вигляді лінійних крайових задач теплопровідності для двовимірних однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур.
3. Вперше отримано аналітично-числові розв’язки нелінійних крайових задач теплопровідності для двовимірних термочутливих однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур з конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційних матеріалів.
4. Розроблено нелінійну математичну модель процесу теплопровідності для термочутливої тривимірної структури із малим чужорідним теплоактивним включенням та одержано наближений аналітичний розв’язок відповідної крайової задачі з конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційних матеріалів.
5. Розроблено нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних термочутливих шаруватих структур з локально зосередженими внутрішніми джерелами тепла та отримано аналітично-числові розв’язки відповідних крайових задач із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційних матеріалів.
6. Створено лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для тривимірних структур із чужорідним теплоактивним малим та тонким

включенням та одержано аналітично-числові розв'язки відповідних крайових задач.

7. Розроблено алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу температурних режимів у кусково-однорідних структурах.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані аналітично-числові розв’язки лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності дають змогу розробляти алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу температурних режимів у конструкційних елементах кусково-однорідної структури пристроїв сучасної техніки з метою прогнозування їхніх режимів роботи, ідентифікування невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їхній термін експлуатації.

Створені лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для кусково-однорідних структур використано для апробації розроблених методів розв’язування крайових задач математичної фізики в Інституті технічної теплофізики НАН України, а програмні – для зіставлення результатів числових експериментів. Алгоритми аналізу температурних режимів у кусково-однорідних структурах і програмні засоби їхньої числової реалізації впроваджені у НВП "КАРАТ" для розроблення ефективних термоохолоджувальних систем у пристроях електронної техніки в результаті виконання науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт та у ЗАТ НВО "ТЕРМОПРИЛАД" для проектування із термостійких конструкційних матеріалів температурних перетворювачів з метою їхньої ефективної роботи у широкому інтервалі температур, які розробляються у процесі виконання науково-дослідних та проектно-конструкторських робіт.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати дисертаційної роботи отримані автором особисто. В друкованих працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належить формулювання проблеми моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах [30, 33, 35, 36, 54], які можуть бути і термочутливими [37-40], створення лінійних [2, 3, 8, 11] і нелінійних [1, 6, 9, 10, 46] математичних моделей процесу теплопровідності для кусково-однорідних структур, виведення основних диференціальних рівнянь теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнами [27, 42-44] розроблення методів знаходження аналітично-числових розв’язків відповідних лінійних [14, 15, 25, 26] та нелінійних [41, 45] крайових задач та алгоритмів [21-23, 29, 47] і програмних засобів їхньої числової реалізації [17-20, 48].

Апробація результатів дисертації. Основні теоретичні положення та практичні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких наукових конференціях: X – XIV Міжнародні наукові конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2004р., 2006р., 2008р., 2010р., 2012р.), XII, XIII Міжнародні науково-практичні конференції “Современные информационные и электронные технологии” (Одеса, 2011р., 2012р.), Міжнародна науково-практична конференція “Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія” (Вінниця, 2010р.), II Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2008р.), IV Міжнародний симпозіум українських інженерів–механіків у Львові (Львів, 1999р.), IV Міжнародна конференція з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995р.), Міжнародна математична конференція, присвячена пам’яті Ганса Гана (Чернівці, 1994р.), I Міжнародна конференція “Конструкційні та функціональні матеріали” КФН,93. Теорія, експеримент, взаємодія (Львів, 1993р.), Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки і математики”, присвячена 70-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача та 25-річчю заснованого ним Інституту прикладних проблем механіки і математики (Львів, 1998р.), VI Міжнародна науково-технічна конференція “Комп’ютерні науки та інформаційні технології” CSIT 2011 (Львів, 2011р.), VIII Міжнародна конференція “Перспективні технології і методи проектування МЕМС” MEMSTECH’ 2012, (Поляна, 2012р.), X Міжнародна науково-технічна конференція “Досвід розробки та застосування приладо-технологічних САПР в мікроелектроніці” CADSM 2009 (Поляна-Свалява, Закарпаття, 2009р.), V Українська наукова конференція з фізики напівпровідників (Ужгород, 2011р.), Всеукраїнська наукова конференція “Застосування математичних методів в науці і техніці” (Луцьк, 2011р.), Всеукраїнська наукова конференція “Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях” (Львів, 1994р.,1995р.,1996р.), VIII конференція “Математическое моделирование и информационные технологии” (Одеса, 2008р.), Всеукраїнська наукова конференція “Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях”, присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С. Казімірського (Львів, 1995р.), IV Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 2008р.), а також семінарах Національного університету .“Львівська політехніка” та Західного наукового центру НАН України.

Публікації. Результати проведених наукових досліджень відображені у 54 наукових працях, серед яких – 1 монографія, 27 статей у фахових наукових виданнях, в тому числі 22 з технічних наук, 1–не у фахових наукових виданнях та 25 – матеріали конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел із 211 найменувань та додатків. Загальний обсяг роботи становить 225 сторінок машинописного тексту, з них 205 сторінок основного тексту і 42 рисунки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету на основі завдання досліджень, показано зв’язок із науковими програмами, планами, темами, сформульовано наукову новизну. Розглянуто практичну цінність, реалізацію та впровадження результатів роботи. Наведено дані про особистий внесок дисертанта, апробацію роботи та публікації.

У першому розділі висвітлено проблему моделювання теплоперенесення для однорідних та неоднорідних тіл різної розмірності і геометричної форми та проведено огляд основних літературних джерел у напрямку створення лінійних і нелінійних математичних моделей процесу теплопровідності та розроблення методів розв’язування крайових і початково-крайових задач, який показав, що малодослідженим залишився процес поширення тепла у дво- та тривимірних кусково-однорідних структурах.

У другому розділі створено лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних кусково-однорідних структур, які зображені у декартовій прямокутній системі координат.

Розглянуто ізотропну безмежну пластину товщиною 2δ з чужорідним паралелепіпедним включенням із об'ємом $8hl\delta$, віднесена до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком у центрі включення та теплоізольованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$ (рис.1). На поверхнях включення $L_{\pm h} = \{(\pm h, y, z) : |y| \le l, |z| \le \delta\}$ та $L_{\pm l} = \{(x, \pm l, z) : |x| \le h, |z| \le \delta\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, на межовій поверхні пластини $K_{+} = \{(x, l + d_1, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою $t_c = const$, а на іншій межовій поверхні пластини $K_{-} = \{(x, -l - d_2, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ зосереджений тепловий потік потужністю $q_0 = const$.

Коефіцієнт теплопровідності для наведеної системи виражено у вигляді

$$\lambda(x, y) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot N(x, h) \cdot N(y, l), \tag{1}$$

де λ_1, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу та включення; $N(x,h)=S_{-}(x+h)-S_{+}(x-h)$; $N(y,l)=S_{-}(y+l)-S_{+}(y-l)$; $S_{\pm}(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції.

Запроваджено функцію

$$T = \lambda(x, y) \cdot \theta, \tag{2}$$

після диференціювання якої за змінними x та y із урахуванням виразу (1), отримано диференціальне рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \Delta T + (\lambda_1 - \lambda_0)\Big\{\Big[\theta\big|_{x=-h} \delta'_{-}(x + h) - \theta\big|_{x=h} \delta'_{+}(x - h)\Big] \cdot N(y, l) + \\ + \Big[\theta\big|_{y=-l} \delta'_{-}(y + l) - \theta\big|_{y=l} \delta'_{+}(y - l)\Big] \cdot N(x, h)\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Тут Δ – оператор Лапласа; $\delta_{\pm}(\zeta)$ – асиметричні дельта функції Дірака; $\theta = t - t_c$ – надлишкова температура.

Завдяки кусково-лінійній апроксимації температури θ за допомогою узагальнених функцій на поверхнях $L_{\pm h}$, $L_{\pm l}$ включення та використання після цього інтегрального перетворення Фур'є за просторовою координатою x, одержано загальний аналітично-числовий розв'язок рівняння (3) та частковий відповідної крайової задачі. Виконано обчислення і зображено розподіл безрозмірної температури $T^* = \lambda_0 \theta / (q_0 h)$ за безрозмірними просторовими координатами $X = x / h,\ Y = y / h$ для конструкційних матеріалів кераміка ВК94-1 – срібло (рис.2).

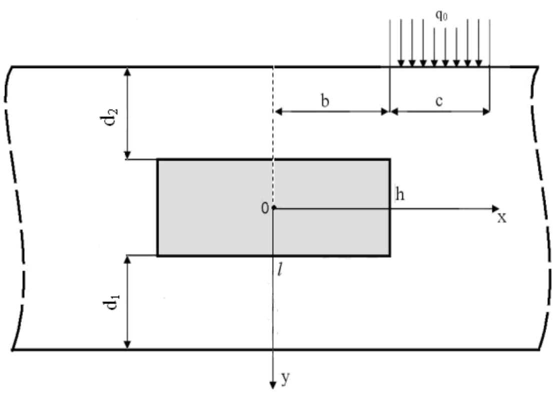

Рис.1. Переріз ізотропної безмежної пластини з чужорідним включенням площиною $z = 0$

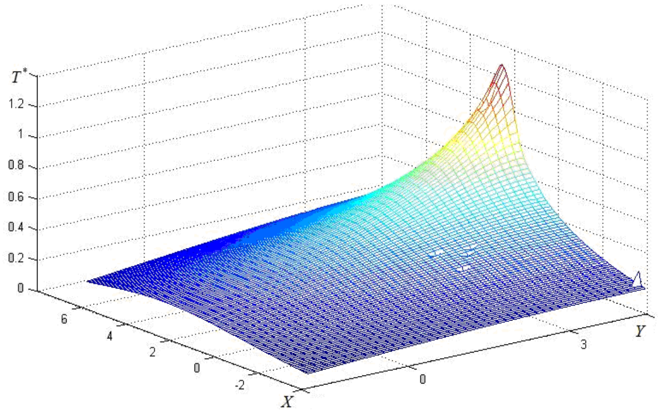

Рис.2. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат X та Y

Визначено температурне поле в безмежній пластині з наскрізним теплоактивним включенням, на межових поверхнях $K_{\pm}$ якої задано крайові умови другого роду (рис.3), та розподіл безрозмірної температури $T^* = \lambda_0 \theta / (q_0 h^2)$ за безрозмірними просторовими координатами, зображений на графіку (рис.4).

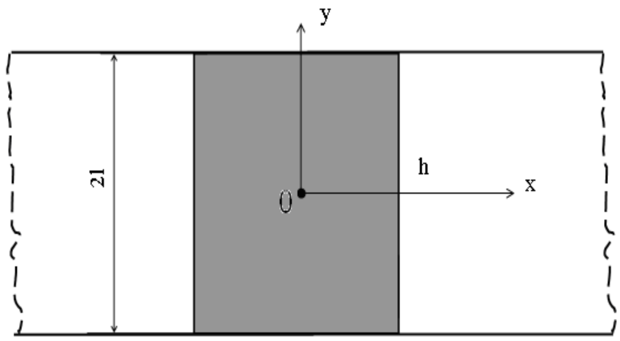

Рис.3. Переріз ізотропної безмежної пластини з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням площиною $z = 0$

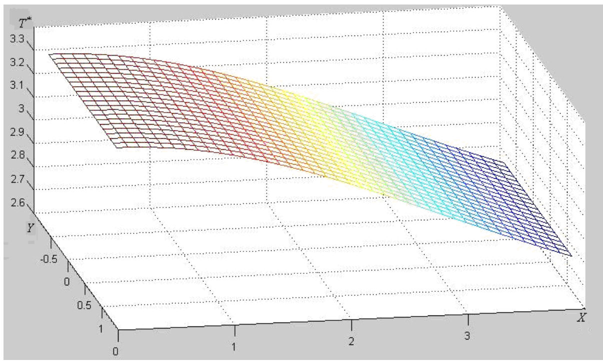

Рис.4. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат X та Y

Далі розглянуто ізотропну багатошарову безмежну пластину товщиною 2δ, яка складається із n різнорідних шарів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком на одній з її межових поверхонь та теплоізольованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$. У j-ому ($j = \overline{2, n-1}$) шарі пластини міститься паралелепіпедне включення з об'ємом $4h\delta(y_j - y_{j-1})$. На поверхнях шарів $K_k = \{(x, y_k, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\} (k = \overline{1, n-1})$ та включення $L_{\pm} = \{(\pm h, y, z) :\ y_{j-1} \le y \le y_j, |z| \le \delta\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, на межовій поверхні $K_n = \{(x, y_n, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ пластини відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c, а на іншій межовій поверхні $K_0 = \{(x, 0, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ пластини зосереджений тепловий потік потужністю q_0 (рис.5).

Для цієї структури коефіцієнт теплопровідності виражено у вигляді

$$\lambda(x,y)=\lambda_1+\sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\cdot S_+(y-y_k)+(\lambda_0-\lambda_j)\cdot N(x,h)\cdot N(y,y_{j-1}), \qquad (4)$$

де λ_k, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів k – ого шару та включення відповідно; $N(y,y_{j-1})=S_+(y-y_{j-1})-S_+(y-y_j)$.

За допомогою функції (2) із урахуванням співвідношення (4) отримано таке диференціальне рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами:

$$\Delta T-\sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\cdot\theta(x,y_k)\cdot\delta'_+(y-y_k)-(\lambda_0-\lambda_j)\cdot\{[\theta(-h,y)\cdot\delta'_-(x+h)-$$
$$-\theta(h,y)\cdot\delta'_+(x-h)]\cdot N(y,y_{j-1})+[\theta(x,y_{j-1})\cdot\delta'_+(y-y_{j-1})-\theta(x,y_j)\cdot\delta'_+(y-y_j)]\cdot N(x,h)\}=0. \qquad (5)$$

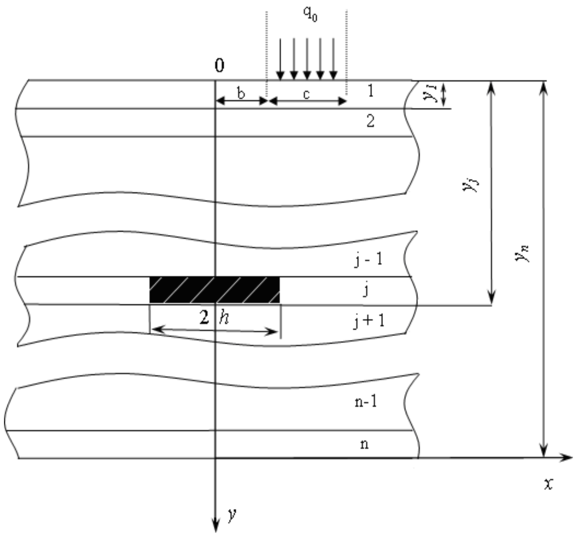

Рис. 5. Переріз ізотропної багатошарової безмежної пластини з чужорідним включенням площиною $z=0$

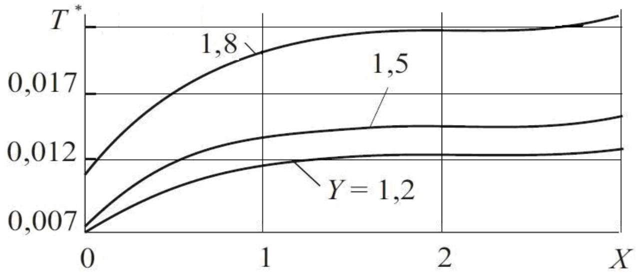

Рис. 6. Залежність безрозмірної температури T^* від координати X для 2-го шару пластини

Завдяки кусково-лінійній апроксимації температури θ на поверхнях $L_{\pm h}$, $K_{j-1}=\{(x,y_{j-1},z):|x|\le h,|z|\le\delta\}, K_j=\{(x,y_j,z):|x|\le h,|z|\le\delta\}$ включення та використання після цього інтегрального перетворення Фур'є, одержано загальний аналітично-числовий розв'язок рівняння (5) та частковий – відповідної крайової задачі. Виконано обчислення і зображено розподіл безрозмірної температури $T^*=\lambda_0\theta/(q_0h)$ за безрозмірними координатами $X=x/h$, $Y=y/h$ для тришарової пластини нікель – кераміка ВК94-1– кремній із включенням (срібло) у середньому шарі (рис.6).

Визначено температурне поле в багатошаровій безмежній пластині з наскрізним включенням, на межових поверхнях K_0, K_n якої задано крайові умови другого роду (рис.7).

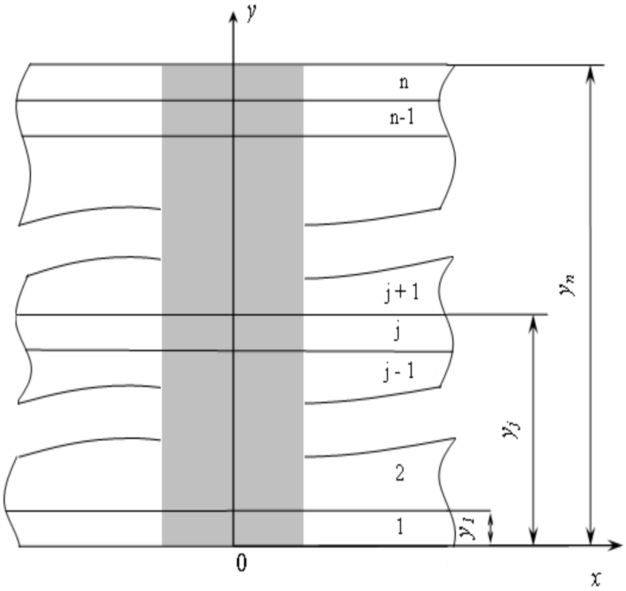

Рис.7. Переріз ізотропної багатошарової безмежної пластини з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням площиною $z=0$

У третьому розділі розроблено лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних кусково-однорідних структур, які зображено у циліндричній системі координат.

Розглянуто ізотропний шар товщиною $2l+h+d$, що містить циліндричне включення з радіусом R та висотою $2l$, віднесений до циліндричної системи координат (r,φ,z) із початком у центрі включення. В області $\Omega_0=\{(r,\varphi,z): r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi, |z|\le l\}$, що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0. На поверхнях $L_R=\{(R,\varphi,z): 0\le\varphi\le 2\pi, |z|\le l\}$ та $L_{\pm l}=\{(r,\varphi,\pm l): r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ включення виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару $K_+=\{(r,\varphi,l+h): 0\le r<\infty, 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $K_-=\{(r,\varphi,-l-d): 0\le r<\infty, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.8).

Коефіцієнт теплопровідності для такої системи виражено у вигляді

$$\lambda(r,z)=\lambda_1+(\lambda_0-\lambda_1)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z,l), \quad (6)$$

де λ_1,λ_0 – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу та включення;

$$N(z,l)=S_-(z+l)-S_+(z-l).$$

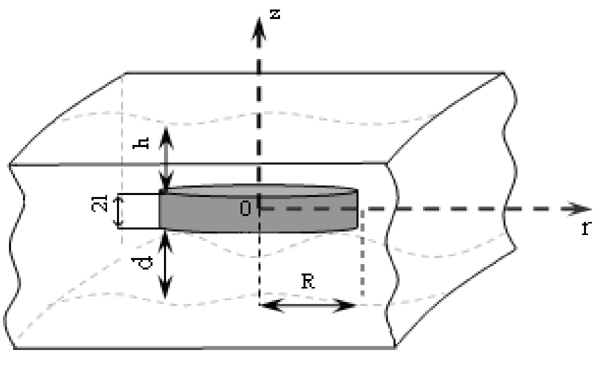

Рис. 8. Ізотропний шар із чужорідним циліндричним теплоактивним включенням

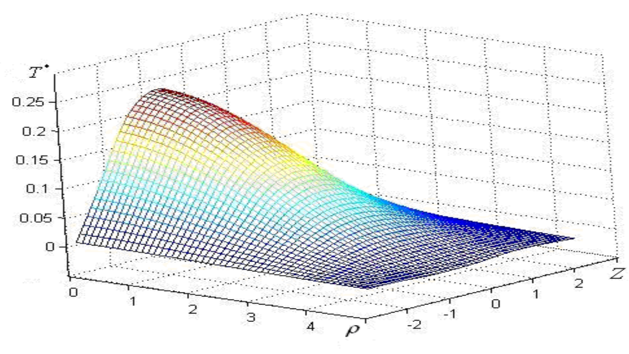

Рис. 9. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат ρ та Z

Запроваджено функцію

$$T=\lambda(r,z)\cdot\theta, \tag{7}$$

після диференціювання якої за змінними r та z із урахуванням виразу (6), отримано диференціальне рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}\Delta T+(\lambda_0-\lambda_1)\Big\{\frac{r}{R}\cdot\theta\big|_{r=R}\cdot N(z,l)\cdot\delta_+'(r-R)+\\ +\Big[\theta\big|_{z=l}\cdot\delta_+'(z-l)-\theta\big|_{z=-l}\cdot\delta_-'(z+l)\Big]\cdot S_-(R-r)\Big\}=-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z,l).\end{aligned} \tag{8}$$

За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури θ на поверхнях $L_R, L_{\pm l}$ включення та використання після цього інтегрального перетворення Ганкеля, одержано загальний аналітично-числовий розв'язок рівняння (8), частковий розв'язок відповідної крайової задачі та виконано числові розрахунки розподілу безрозмірної температури $T^*=\lambda_0\theta/(q_0R^2)$ за безрозмірними просторовими радіальною $\rho=r/R$ та аксіальною $Z=z/r$ координатами для конструкційних матеріалів кераміка ВК94-1 – срібло (рис.9).

Визначено температурне поле в шарі з наскрізним теплоактивним включенням, на межових поверхнях $K_\pm$ якого задано крайові умови другого роду (рис.10), та розподіл безрозмірної температури T^* за безрозмірними просторовими координатами, зображений на графіку (рис.11).

Далі розглянуто ізотропний неоднорідний шар, який складається із n різнорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами і віднесений до циліндричної системи координат (r,φ,z) із початком на одній з його межових поверхонь. У j-ому ($j=\overline{2,n-1}$) елементі шару міститься циліндричне включення з радіусом R та висотою, що дорівнює товщині цього елемента. На поверхнях різнорідних конструкційних елементів $K_i=\{(r,\varphi,z_i): r<\infty, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ $(i=\overline{1,n-1})$ та межових поверхнях включення $K_R=\{(R,\varphi,z):\ 0\le\varphi\le 2\pi, z_{j-1}\le z\le z_j\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту.

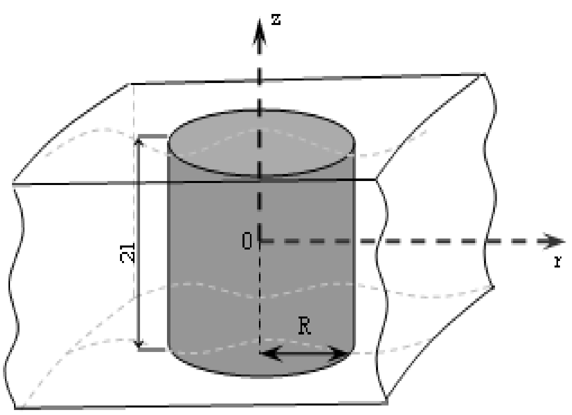

Рис.10. Ізотропний шар із чужорідним наскрізним циліндричним теплоактивним включенням

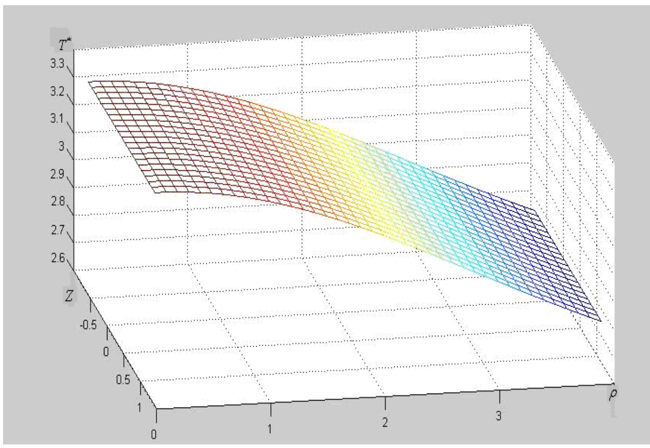

Рис.11. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат ρ та Z

В області $\Omega_0 = \left\{ (r,\varphi,z) : r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, z_{j-1} \le z < z_j \right\}$, що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0, а на межових поверхнях $K_0 = \{(r,\varphi,0) : r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $K_n = \{(r,\varphi,z_n) : r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ шару відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.12).

Для цієї структури коефіцієнт теплопровідності виражено у вигляді

$$\lambda(r,z) = \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \cdot S_+(z - z_i) + (\lambda_0 - \lambda_j) \cdot S_-(R - r) \cdot N(z, z_{j-1}),$$

де λ_i, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів i-го шару та включення відповідно; $N(z, z_{j-1}) = S_+(z - z_{j-1}) - S_+(z - z_j)$.

За допомогою функції (7) одержано диференціальне рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\begin{gathered} \Delta T - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \theta(r, z_i) \delta'_+(z - z_i) + (\lambda_0 - \lambda_j) \left\{ \frac{r}{R} \theta(R, z) N(z, z_{j-1}) \delta'_+(r - R) + \right. \\ \left. + \left[\theta(r, z_j) \delta'_+(z - z_j) - \theta(r, z_{j-1}) \delta'_+(z - z_{j-1}) \right] S_-(R - r) \right\} = -q_0 \cdot S_-(R - r) \cdot N(z, z_{j-1}). \end{gathered} \tag{9}$$

Завдяки кусково-лінійній апроксимації температури θ на поверхнях K_R, $K_{j-1} = \left\{ (r,\varphi,z_{j-1}) : r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}, K_j = \left\{ (r,\varphi,z_j) : r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$ включення та використання після цього інтегрального перетворення Ганкеля, отримано загальний аналітично-числовий розв'язок рівняння (9), частковий розв'язок відповідної крайової задачі та виконано числові розрахунки і зображено розподіл безрозмірної температури $T^* = \lambda_0 \theta / (q_0 R^2)$ за безрозмірними просторовими радіальною $\rho = r / R$ та аксіальною $Z = z / R$ координатами для триелементного шару нікель – кераміка ВК94-1– кремній із включенням (срібло) у середньому елементі (рис.13 та рис.14).

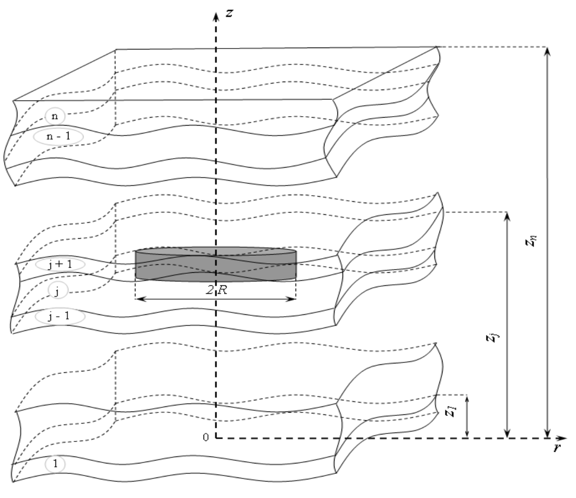

Рис.12. Ізотропний кусково-однорідний шар із циліндричним теплоактивним включенням

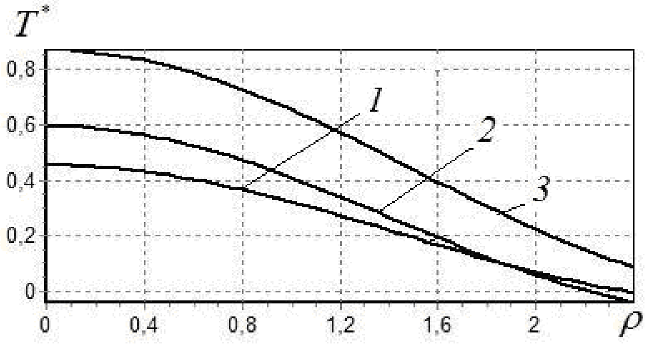

Рис.13. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати ρ : $1 - Z = 0;\ 2 - 5; 3 - 2$

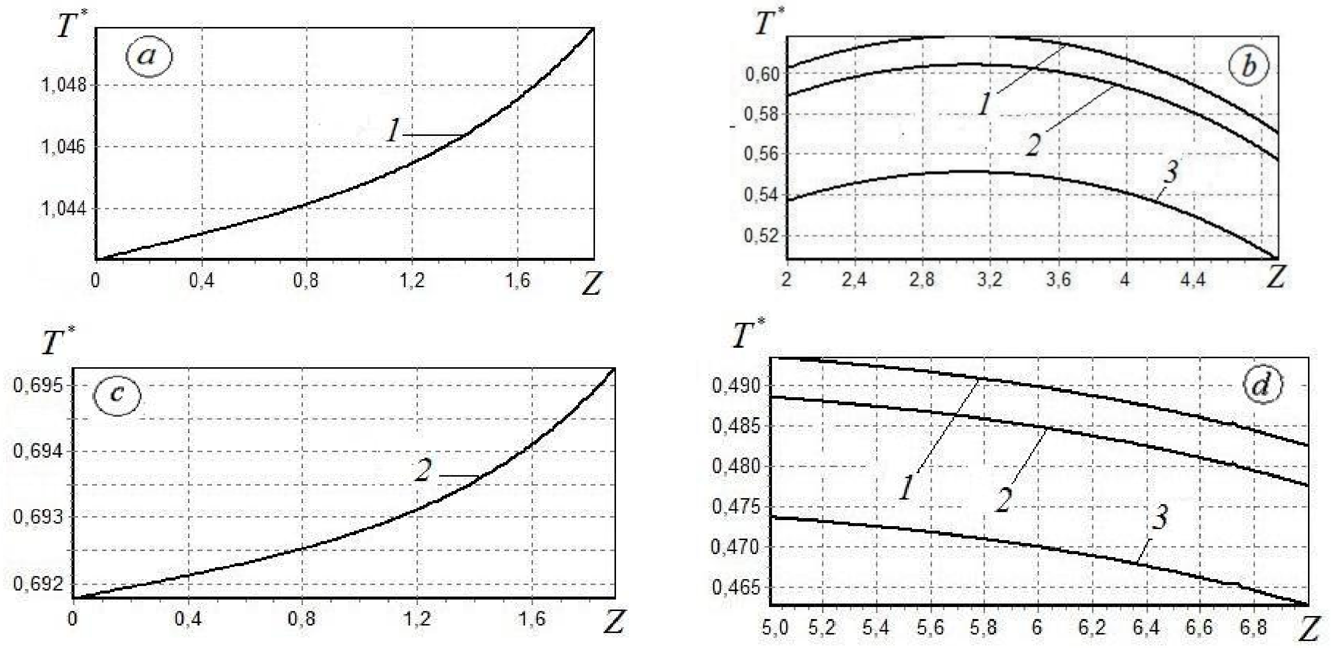

Рис. 14. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Z ($a, c -$ для першого елемента шару, $b -$ для другого і $d -$ для третього): $1-\rho=0;\ 2-1;\ 3-3$

Визначено температурне поле в кусково-однорідному шарі із чужорідним наскрізним теплоактивним включенням, на межових поверхнях K_0, K_n якого задано крайові умови другого роду (рис.15).

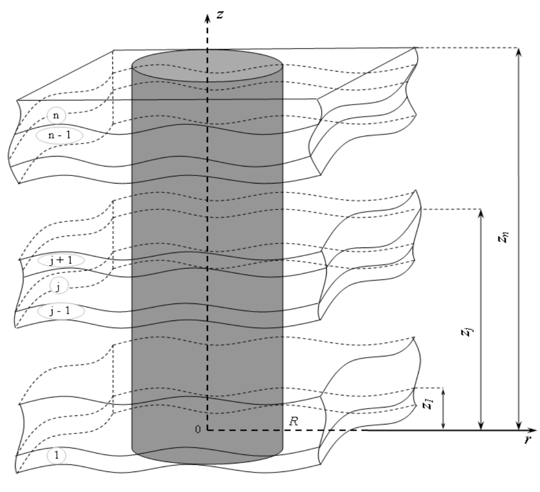

Рис. 15. Ізотропний кусково-однорідний шар із чужорідним наскрізним циліндричним теплоактивним включенням

У четвертому розділі створено лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для просторових тіл із малим та тонким чужорідним включенням.

Розглянуто ізотропний шар, віднесений до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком в центрі включення, що містить паралелепіпедне включення з об'ємом $V_0 = 8hbd$, в області $\Omega_0 = \{(x, y, z): |x| \le h, |y| \le b, |z| \le d\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0. На поверхнях чужорідного теплоактивного включення виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару

$K_b=\{(x,y,d+l_b):|x|<\infty,|y|<\infty\}$, $K_n=\{(x,y,-d-l_n):|x|<\infty,|y|<\infty\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.16).

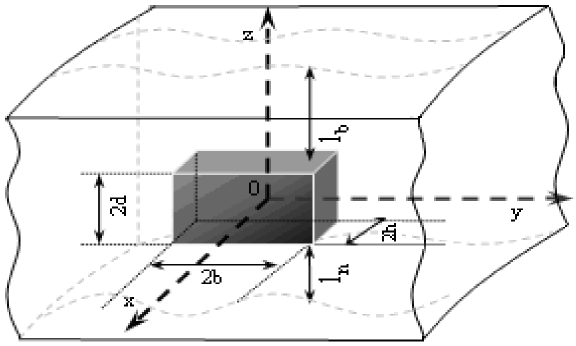

Рис. 16. Ізотропний шар з чужорідним паралелепіпедним теплоактивним малим включенням

Коефіцієнт теплопровідності шару та потужність діючих джерел тепла виражено у вигляді

$$\begin{gathered}\lambda(x,y,z)=\lambda_1+(\lambda_0-\lambda_1)N(x,h)N(y,b)N(z,d),\\ Q(x,y,z)=q_0N(x,h)N(y,b)N(z,d)\,,\end{gathered}\qquad(10)$$

де $N(\zeta,\eta)=S(\zeta+\eta)-S(\zeta-\eta)$; λ_1,λ_0 – коефіцієнти теплопровідності для матеріалів шару та включення відповідно; $S(\zeta)$ – симетрична одинична функція.

Припускається, що розміри включення є малими у порівнянні із відстанями l_b, l_n від його поверхонь $\Pi_\pm=\{(x,y,\pm d):|x|\le h,|y|\le b\}$ до межових поверхонь K_b,K_n шару, у зв'язку із чим запроваджується зведений коефіцієнт теплопровідності $\Lambda_0=\lambda_0V_0$ включення, зведена потужність діючих джерел тепла $Q_0=q_0V_0$ і здійснюється граничний перехід у виразах (10) для $h\to0,b\to0,d\to0$, де Λ_0 і Q_0 зберігаються сталими. Використовується відома границя $\lim\limits_{\eta\to0}\dfrac{N(\zeta,\eta)}{2\eta}=\delta(\zeta)$, у результаті чого отримується таке диференціальне рівняння з частинними похідними із сингулярними коефіцієнтами:

$$\begin{gathered}\Delta\theta+\frac{\Lambda_0}{\lambda_1}\left[\left.\frac{\partial\theta(x,0,0)}{\partial x}\right|_{x=0}^{*}\cdot\delta'(x)\delta(y,z)+\left.\frac{\partial\theta(0,y,0)}{\partial y}\right|_{y=0}^{*}\delta'(y)\delta(x,z)+\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0}^{*}\delta'(z)\delta(x,y)\right]=\\ =-\frac{Q_0}{\lambda_1}\delta(x,y,z).\end{gathered}\qquad(11)$$

Тут $\delta(x,y,z)$ – дельта-функція Дірака;

$$\left.\frac{\partial\theta(x,0,0)}{\partial x}\right|_{x=0}^{*}=\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial\theta(x,0,0)}{\partial x}\right|_{x=+0}+\left.\frac{\partial\theta(x,0,0)}{\partial x}\right|_{x=-0}\right].$$

Із використанням інтегрального перетворення Фур'є одержано загальний наближений аналітичний розв'язок рівняння (11) та частковий – відповідної крайової задачі.

Виконано числовий аналіз розподілу безрозмірної температури T^* за просторовою координатою Y для шару та включення з різних матеріалів (рис. 17), а також зображено температурне поле (рис.18) для шару та включення і середнього значення коефіцієнта теплопровідності для їхніх матеріалів.

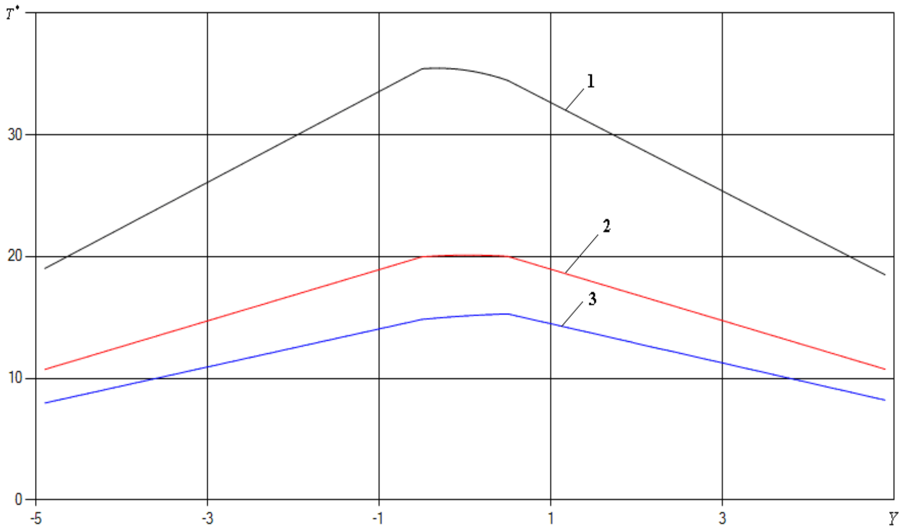

Рис. 17. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Y : 1 – кераміка ВК94-1 – срібло; 2 – кераміка ВК94-1 – алюміній; 3 – кераміка ВК94-1 – кремній

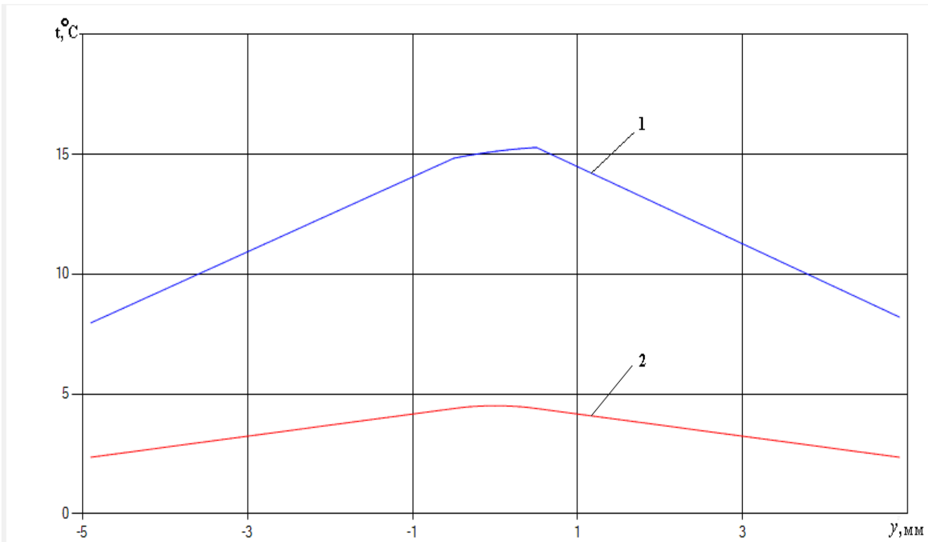

Рис. 18. Залежність розподілу температури t від просторової координати Y :
1 – кераміка ВК94-1 – срібло; 2 – середнє значення коефіцієнта теплопровідності для цих матеріалів

Розглянуто ізотропний шар із тонким включенням (рис.19), коефіцієнт теплопровідності якого виражено у вигляді

$$\lambda(x, y, z) = \lambda_1 + \Lambda_0 \cdot N(z, d) \cdot \delta(x, y), \tag{12}$$

де $\Lambda_0 = 4hb \cdot \lambda_0$ – зведений коефіцієнт теплопровідності включення; λ_0, λ_1 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення і шару, відповідно; $N(z,d) = S_-(z+d) - S_+(z-d)$; $Q(x,y,z) = Q_0 \cdot N(z,d) \cdot \delta(x,y)$; $Q_0 = 4hb \cdot q_0$ – зведена потужність внутрішніх джерел тепла.

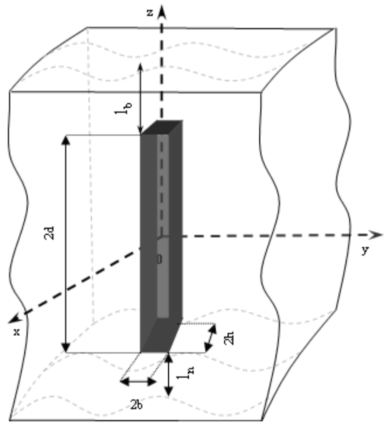

Рис. 19. Ізотропний шар з чужорідним паралелепіпедним теплоактивним тонким включенням

Запроваджено функцію

$$T = \lambda(x,y,z) \cdot \theta, \tag{13}$$

після диференціювання якої за змінними x, y та z із урахуванням виразу (12) отримано диференціальне рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами:

$$\Delta T - \Lambda_0 \Big\{ \theta(0,0,z) \cdot \left[\delta_x''(x,y) + \delta_y''(x,y) \right] \cdot N(z,d) + \left[\theta(0,0,-d) \cdot \delta_-'(z+d) - \right. \\ \left. - \theta(0,0,d) \cdot \delta_+'(z-d) \right] \cdot \delta(x,y) \Big\} = -Q(x,y,z). \tag{14}$$

За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури θ на відрізку $[-d;d]$ та використання після цього інтегрального перетворення Фур'є одержано загальний аналітично-числовий розв'язок рівняння (14) та частковий – відповідної крайової задачі.

Наведено визначення температурного поля в шарі з наскрізним тонким теплоактивним включенням, на межових поверхнях K_n, K_b якого задано крайові умови другого роду (рис.20).

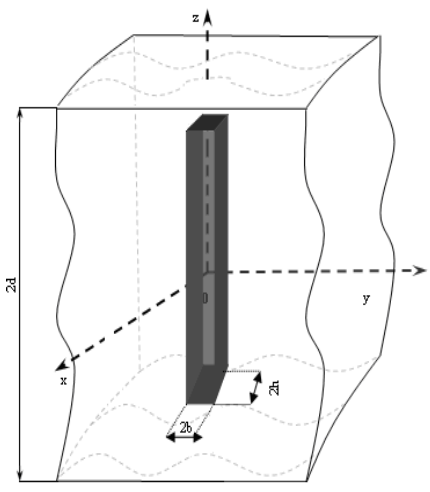

Рис.20. Ізотропний шар з наскрізним чужорідним паралелепіпедним теплоактивним тонким включенням

Далі розглянуто термочутливий шар із чужорідним малим теплоактивним включенням паралелепіпедної форми, на межових поверхнях K_n, K_b якого задано крайові умови другого роду (рис.16).

Коефіцієнт теплопровідності для такої структури виражено у вигляді:

$$\lambda(x,y,z,t) = \lambda_1(t) + \Lambda_0 \cdot \delta(x,y,z).$$

Із використанням змінної Кірхгофа

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_1^0} \int_0^{t(x,y,z)} \lambda_1(\zeta)\, d\zeta,$$

де λ_1^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності шару, крайову задачу для визначення ϑ записано у вигляді

$$\Delta\vartheta = -\frac{1}{\lambda_1^0}\left[\Lambda_0 \cdot \left.\frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z}\right|_{z=0}^{*} \cdot \delta'(z) + Q_0 \cdot \delta(z)\right] \cdot \delta(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=-d-l_n} = \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=d+l_b} = 0,\ \left.\vartheta\right|_{|x|\to\infty} = \left.\vartheta\right|_{|y|\to\infty} = 0,\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{|y|\to\infty} = 0,$$

наближений аналітичний розв’язок якої одержано за допомогою інтегрального перетворення Фур’є. Залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури виражено такими співвідношеннями:

$$\lambda = \kappa t^3 \ (\kappa - const), \tag{15}$$

$$\lambda = \lambda^0(1 - kt). \tag{16}$$

Тут λ^0 і k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності. Отримано розрахункові формули для обчислення значень температури у просторовій термочутливій неоднорідній структурі.

У п’ятому розділі розроблено нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для термочутливих шаруватих структур.

Розглянуто ізотропну термочутливу багатошарову безмежну пластину товщиною 2δ, яка складається з n різнорідних шарів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком на одному з її країв та теплоізольованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$. В області паралелепіпеда з об’ємом $4h\delta \cdot (y_j - y_{j-1})$ j-го $(j = \overline{2, n-1})$ шару пластини діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0. На поверхнях $K_k = \{(x, y_k, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ $(k = \overline{1, n-1})$ шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях пластини $K_0 = \{(x, 0, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$, $K_n = \{(x, y_n, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.21).

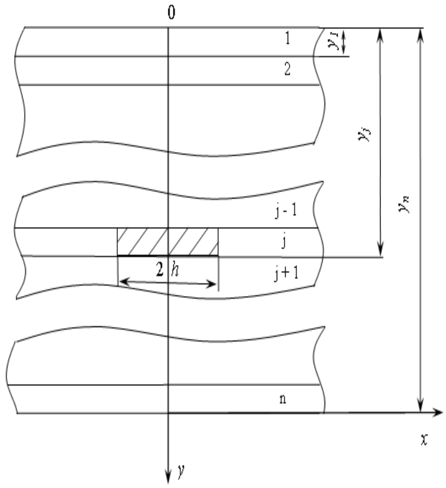

Рис.21. Переріз ізотропної термочутливої багатошарової безмежної пластини площиною $z=0$

Запроваджено функцію

$$\vartheta = \int\limits_{0}^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta)d\zeta + \sum_{k=1}^{n-1} S_-(y-y_k)\cdot \int\limits_{t(x,y_k)}^{t(x,y)} [\lambda_{k+1}(\zeta)-\lambda_k(\zeta)]d\zeta\,,$$

після диференціювання якої за змінними x та y, отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\lambda_{k+1}(t)-\lambda_k(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=y_k}\cdot S_-(y-y_k)\right\} = -q_0\cdot N(x,h)\cdot N_1(y,y_{j-1}), \qquad (17)$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0\cdot\left(t\big|_{y=0}-t_c\right),\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n} = \alpha_n\cdot(t_c - t\big|_{y=y_n}),\ \vartheta\big|_{|x|\to\infty}=0,\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0. \qquad (18)$$

Завдяки кусково-лінійній апроксимації температури t на поверхнях K_k $(k=\overline{1,n-1})$ шарів і межових поверхнях K_0, K_n пластини та використання після цього інтегрального перетворення Фур'є, отримано наближений аналітичний розв'язок крайової задачі (17), (18). Розглянуто тришарову пластину із джерелами тепла у середньому шарі та залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (15). Одержано розрахункові формули для визначення розподілу температури за просторовими координатами у наведеній структурі.

Для двошарової термочутливої пластини (рис.22), яка складається зі сталей У12 $(\lambda = 47{,}5\cdot(1-0{,}37t))$ та О8 $(\lambda = 64{,}5\cdot(1-0{,}49t))$ і на поверхнях спряження шарів якої рівномірно розподілені джерела тепла з потужністю $q_0=200$ Вт виконано обчислення значень температури в інтервалі [0^0С; 700^0С] температур, де встановлено залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури та проведено експериментальні вимірювання температури у точках межової поверхні пластини (рис.23).

Далі розглянуто ізотропний термочутливий кусково-однорідний шар, який складається з n різнорідних елементів, що відрізняються геометричними і теплофізичними параметрами, віднесений до циліндричної системи координат (r,φ,z) із початком на одній з його межових поверхонь.

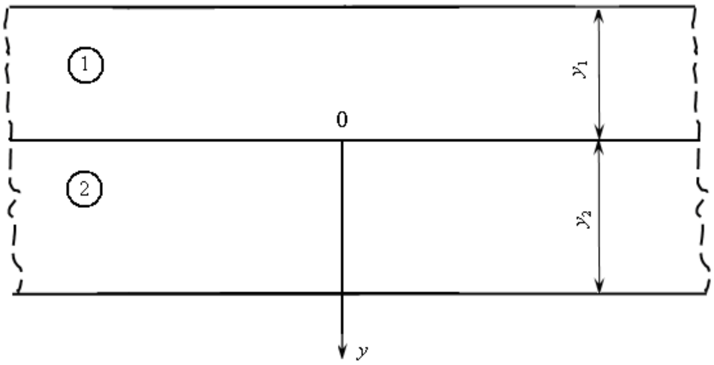

Рис. 22. Двошарова пластина, на межових поверхнях $y = y_1$ та $y = y_2$ якої задано значення температури $t = 0^0$C і $t = 700^0$C відповідно

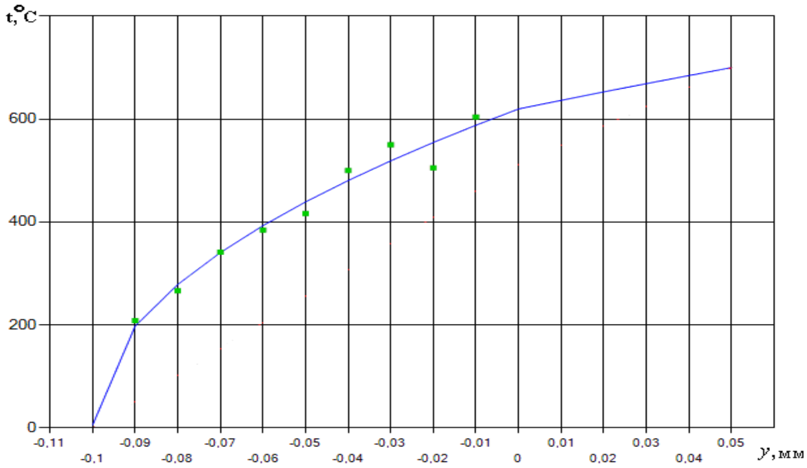

Рис. 23. Залежність температури t від просторової координати y для термочутливої пластини

В області циліндра з об'ємом $\pi R^2(z_j - z_{j-1})$ j-го ($j = \overline{2, n-1}$) елемента шару діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0. На поверхнях різнорідних елементів $K_i = \{(r, \varphi, z_i): r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}(i = \overline{1, n-1})$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях $K_0 = \{(r, \varphi, 0): r \le \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $K_n = \{(r, \varphi, z_n): r \le \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ шару відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.24).

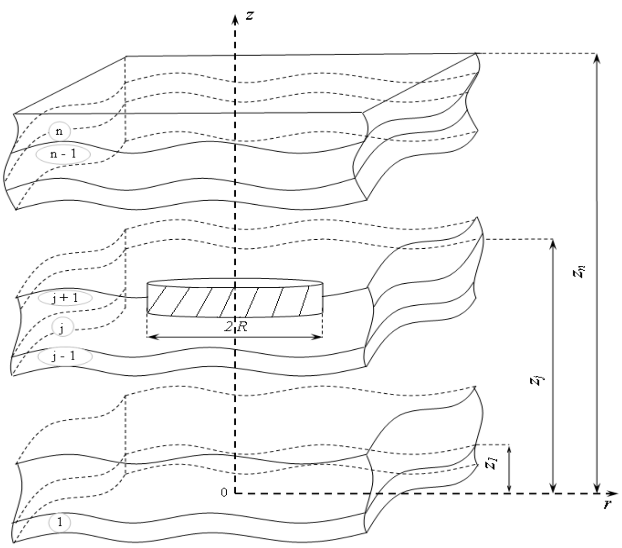

Рис.24. Ізотропний термочутливий кусково-однорідний шар

Запроваджено функцію

$$\vartheta = \int\limits_{0}^{t(r,z)} \lambda_1(\zeta)d\zeta + \sum_{i=1}^{n-1} S_-(z-z_i) \int\limits_{t(r,z_i)}^{t(r,z)} [\lambda_{i+1}(\zeta) - \lambda_i(\zeta)]d\zeta,$$

після диференціювання якої за змінними r та z отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \cdot \left\{ r\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\lambda_{i+1}(t)-\lambda_i(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Bigg|_{z=z_i} \cdot S_-(z-z_i) \right\} = -q_0 \cdot S_-(R-r)\cdot N(z, z_{j-1}), \quad (19)$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=0} = \alpha_0 \cdot (t|_{z=0} - t_c),\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{y=y_n} = -\alpha_n \cdot (t|_{z=z_n} - t_c),\ \vartheta|_{r\to\infty} = 0,\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = 0. \quad (20)$$

За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури t на поверхнях різнорідних елементів $K_i\,(i=\overline{1,n-1})$ і межових поверхнях K_0, K_n шару та використання після цього інтегрального перетворення Ганкеля одержано наближений аналітичний розв'язок крайової задачі (19), (20). Розглянуто триелементний шар із джерелами тепла у середньому елементі та залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16). Отримано розрахункові формули для визначення розподілу температури за просторовими координатами у поданій структурі.

У шостому розділі розроблено нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для термочутливих двовимірних кусково-однорідних структур, які зображено у декартовій прямокутній системі координат.

Розглянуто ізотропну термочутливу безмежну пластину товщиною 2δ, яка містить паралелепіпедне включення з об'ємом $8hl\delta$, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком в центрі включення з теплоізольованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$. На поверхнях включення $L_{\pm h} = \{(\pm h, y, z) : |y| \le l, |z| \le \delta\}$, $L_{\pm l} = \{(x, \pm l, z) : |x| \le h, |z| \le \delta\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях пластини $K_+ = \{(x, l+d_1, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$, $K_- = \{(x, -l-d_2, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c. В області $\Omega_0 = \{(x, y, z) : |x| \le h, |y| \le l, |z| \le \delta\}$, що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла, потужність яких дорівнює q_0 (рис.25).

Запроваджено функцію

$$\vartheta = \int\limits_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta)d\zeta + \left\{ \int\limits_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)} [\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]d\zeta \cdot N(y,l) - \int\limits_{t(\pm h,-l)}^{t(x,-l)} [\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]d\zeta \cdot S_-(y+l) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t(\pm h,l)}^{t(x,l)} [\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]d\zeta \cdot S_+(y-l) \right\} \cdot S_-(h-|x|),$$

після диференціювання якої за змінними x та y отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\left(\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=l}\cdot S_+(y-l) - \left(\left(\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=-l}\cdot S_-(y+l)\right]\cdot S_-(h-|x|)\right\} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right]\Bigg|_{|x|=h}\cdot S_-(h-|x|)\cdot N(y,l)\right\} = -q_0\cdot S_-(h-|x|)\cdot N(y,l), \tag{21}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bigg|_{y=l+d_1} = -\alpha_+(t|_{y=l+d_1}-t_c),\ \ \vartheta|_{|x|\to\infty}=0,\ \ \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\bigg|_{|x|\to\infty}=0,$$
$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bigg|_{y=-l-d_2} = \alpha_-(t|_{y=-l-d_2}-t_c). \tag{22}$$

За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури t на поверхнях $L_{\pm h}, L_{\pm l}, K_\pm$ та використання після цього інтегрального перетворення Фур'є одержано наближений аналітичний розв'язок крайової задачі (21), (22). Розглянуто залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16). Отримано розрахункові формули для обчислення значень безрозмірної температури у поданій структурі, а її розподіл за просторовими безрозмірними координатами зображено на графіку (рис.26).

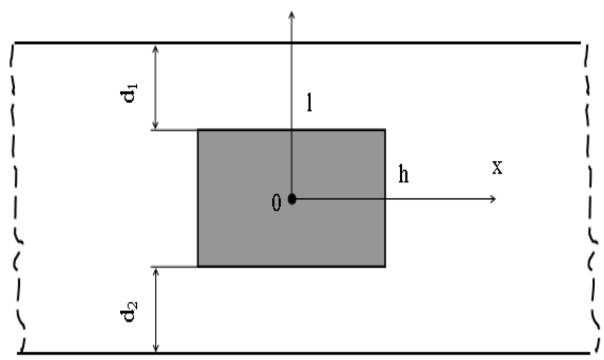

Рис.25. Переріз ізотропної термочутливої пластини з чужорідним теплоактивним включенням площиною $z=0$

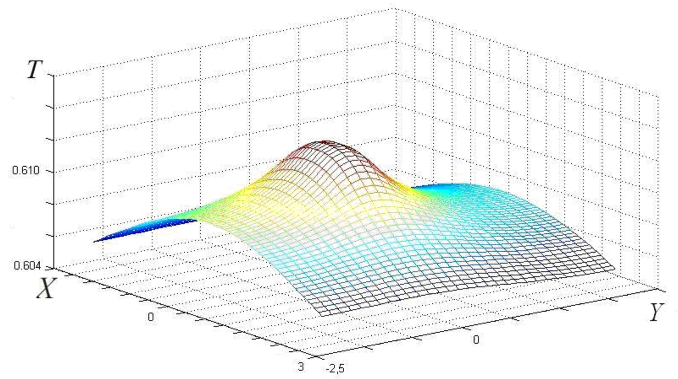

Рис. 26. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірних координат X та Y

Визначено температурне поле в термочутливій безмежній пластині з наскрізним теплоактивним включення, на поверхнях $K_\pm$ якої задано крайові умови другого роду (рис.3).

Запроваджено функцію

$$\vartheta = \int_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta)d\zeta + S_-(h-|x|)\cdot\int_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)\right]d\zeta,$$

після диференціювання якої за змінними x та y отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right]\frac{\partial t}{\partial y}\right\}\Bigg|_{|x|=h}\cdot S_-(h-|x|) = -q_0 S_-(h-|x|),$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{|y|=l}=0,\ \left.\vartheta\right|_{|x|\to\infty}=0,\ \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0$$

та одержано її наближений аналітичний розв'язок.

Отримано розрахункові формули для обчислення значень безрозмірної температури у наведеній структурі із залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16) та проілюстровано результати числових розрахунків (рис.27).

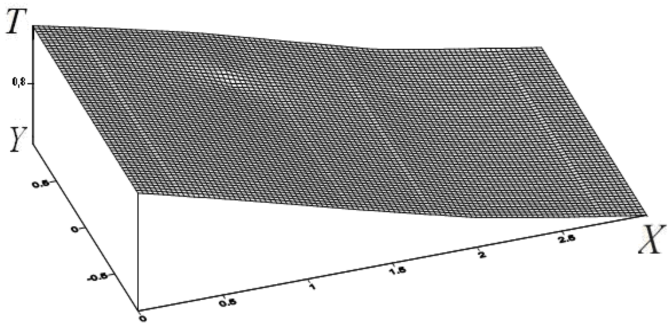

Рис. 27. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірних координат X та Y

Далі розглянуто ізотропну кусково-однорідну термочутливу пластину, яка складається з n різнорідних шарів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком на одному з її країв та теплоізольованими лицевими поверхнями $|z|=\delta$. У j-му $(j=\overline{2,n-1})$ шарі пластини міститься включення паралелепіпедної форми, в області $\Omega_0=\{(x,y,z):|x|\le h, y_{j-1}\le y<y_j, |z|\le\delta\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0. На поверхнях $K_k=\{(x,y_k,z):|x|<\infty, |z|\le\delta\}$ $(k=\overline{1,n-1})$ шарів та включення $L_\pm=\{(\pm h,y,z): y_{j-1}\le y<y_j, |z|\le\delta\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях $K_0=\{(x,0,z):|x|<\infty, |z|\le\delta\}$, $K_n=\{(x,y_n,z):|x|<\infty, |z|\le\delta\}$ пластини відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.28).

Запроваджено функцію

$$\vartheta=\int_0^{t(x,y)}\lambda_1(\zeta)d\zeta+\sum_{k=1}^{n-1}S_-(y-y_k)\cdot\int_{t(x,y_k)}^{t(x,y)}[\lambda_{k+1}(\zeta)-\lambda_k(\zeta)]d\zeta+$$

$$+\left\{\int_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta)\right]d\zeta\cdot N_1(y,y_{j-1})-\int_{t(\pm h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta)\right]d\zeta\cdot S_-(y-y_{j-1})+\right.$$

$$\left.+\int_{t(\pm h,y_j)}^{t(x,y_j)}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta)\right]d\zeta\cdot S_-(y-y_j)\right\}\cdot S_-(h-|x|),$$

після диференціювання якої за змінними x та y отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\lambda_{k+1}(t)-\lambda_k(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=y_k}\cdot S_-(y-y_k)+\right.$$

$$+\left[\left(\left(\lambda_0(t)-\lambda_j(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=y_j}\cdot S_-(y-y_j)-\left(\left(\lambda_0(t)-\lambda_j(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=y_{j-1}}\cdot S_-(y-y_{j-1})\right]\cdot S_-(h- \quad (23)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left\{\left[\left(\lambda_0(t)-\lambda_j(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right]\Bigg|_{x=h}\cdot N_1(y,y_{j-1})\right\}\cdot S_-(h-|x|)=-q_0\cdot S_-(h-|x|)\cdot N_1(y,y_j$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha_0\cdot\left(t\big|_{y=0}-t_c\right),\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n}=\alpha_n\cdot\left(t_c-t\big|_{y=y_n}\right),\ \vartheta\big|_{|x|\to\infty}=0,\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0 \quad (24)$$

і одержано її наближений аналітичний розв'язок. Розглянуто тришарову пластину із включенням у середньому шарі та залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (15). Отримано розрахункові формули для обчислення значень температури у поданій структурі.

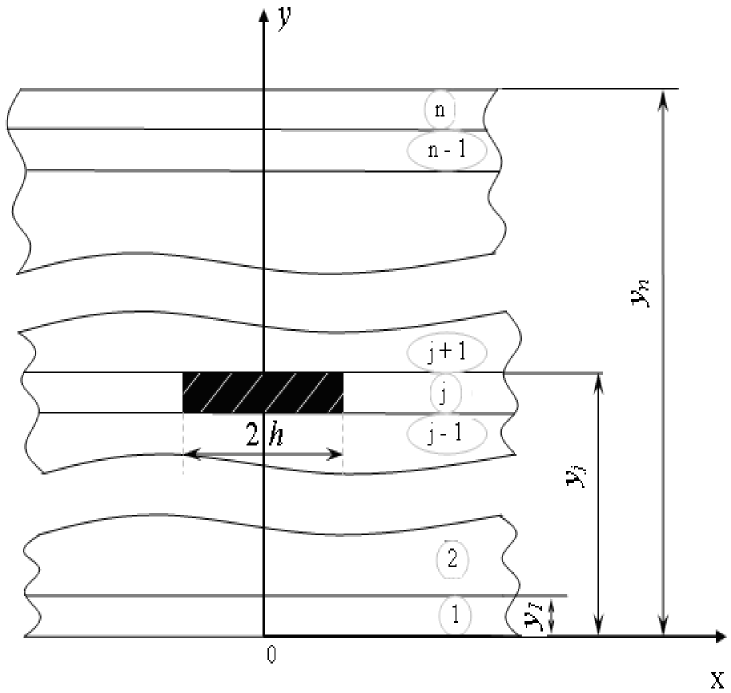

Рис. 28. Переріз багатошарової ізотропної термочутливої пластини з теплоактивним включенням площиною $z=0$

Визначено температурного поля в термочутливій багатошаровій безмежній пластині з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням, на поверхнях K_0, K_n якої задано крайові умови другого роду (рис.7).

Запроваджено функцію

$$\vartheta=\sum_{j=1}^{n}\{\int_0^{t(x,y)}\lambda_j(\zeta)d\zeta\cdot N(y,y_{j-1})+S_-(h-|x|)\cdot[N(y,y_{j-1})\int_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta))d\zeta-\int_{t(\pm h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta))d\zeta\cdot S_+(y-y_{j-1})+$$

$$+\int_{t(\pm h,y_j)}^{t(x,y_j)}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta))d\zeta\cdot S_+(y-y_j)]-\int_0^{t(x,y_{j-1})}\lambda_j(\zeta)d\zeta\cdot S_+(y-y_{j-1})+\int_0^{t(x,y_i)}\lambda_j(\zeta)d\zeta\cdot S_+(y-y_j)\},$$

після диференціювання якої за змінними x, y та деяких перетворень отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}[\Phi_1(x,y)]+\frac{\partial}{\partial y}[\Phi_2(x,y)]=-q_0\cdot S_-(h-|x|), \tag{25}$$

$$\vartheta\bigg|_{|x|\to\infty}=0,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\bigg|_{|x|\to\infty}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bigg|_{y=y_n}=0, \tag{26}$$

де

$$\Phi_1(x,y)=\sum_{j=1}^{n}[(\lambda_j(t)\frac{\partial t}{\partial x})\bigg|_{y=y_{j-1}}\cdot S_+(y-y_{j-1})-(\lambda_j(t)\frac{\partial t}{\partial x})\bigg|_{y=y_j}\cdot S_+(y-y_j)],$$

$$\Phi_2(x,y)=S_-(h-|x|)\cdot\sum_{j=1}^{n}[(\lambda_0(t)-\lambda_j(t))\frac{\partial t}{\partial y}]\bigg|_{|x|=h}\cdot N(y,y_{j-1}).$$

Одержано наближений аналітичний розв’язок задачі (25), (26). Розглянуто двошарову пластину із залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16). Отримано розрахункові формули для визначення розподілу температури у поданій структурі.

У сьомому розділі створено нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності для термочутливих двовимірних кусково-однорідних структур, які зображено у циліндричній системі координат.

Розглянуто ізотропний термочутливий шар із чужорідним циліндричним включенням, радіус якого дорівнює R, а висота $2l$, в області $\Omega_0=\{(r,\varphi,z):r\le R,|z|\le l,0\le\varphi\le 2\pi\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0, віднесений до циліндричної системи координат (r,φ,z) із початком у центрі включення. На поверхнях включення $L_R=\{(R,\varphi,z):|z|\le l,0\le\varphi\le 2\pi\}$, $L_{\pm l}=\{(r,\varphi,\pm l):r\le R,0\le\varphi\le 2\pi\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару $K_+=\{(r,\varphi,l+d_1):0\le r<\infty,0\le\varphi\le 2\pi\}$ $K_-=\{(r,\varphi,-l-d_2):0\le r<\infty,0\le\varphi\le 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.8).

Запроваджено функцію

$$\vartheta=\int_0^{t(r,z)}\lambda_1(\zeta)d\zeta+\left\{\int_{t(R,z)}^{t(r,z)}[\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]d\zeta\cdot N(z,l)-\int_{t(R,-l)}^{t(r,-l)}[\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]d\zeta\cdot S_-(z+l)+\right.$$

$$\left.+\int_{t(R,l)}^{t(r,l)}[\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]d\zeta\cdot S_+(z-l)\right\}\cdot S_-(R-r),$$

після диференціювання якої за змінними r і z та проведених деяких перетворень і спрощень отримано частково лінеаризовану крайову задачу для визначення ϑ

$$\Delta\vartheta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[\left(\left(\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right)\Big|_{z=-l}\cdot S_-(z+l)-\left(\left(\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right)\Big|_{z=l}\cdot S_+(z-l)\right]\cdot S_-(R-r)\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\left(\lambda_0(t)-\lambda_1(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\right]\Big|_{r=R}\cdot S_-(R-r)\cdot N(z,l)\right\}=-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z), \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=l+d_1}=-\alpha_+(t|_{z=l+d_1}-t_c),\quad \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=-l-d_2}=\alpha_-(t|_{z=-l-d_2}-t_c),\quad \vartheta|_{r\to\infty}=0,\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=0. \tag{28}$$

За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури t на поверхнях $L_R, L_{\pm l}, K_\pm$ та використання після цього інтегрального перетворення Ганкеля одержано наближений аналітичний розв'язок крайової задачі (27), (28). Розглянуто залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16). Отримано розрахункові формули для обчислення значень температури у поданій структурі, а її розподіл за просторовими координатами зображено на графіках (рис.29 та рис.30), де суцільною лінією показано зміну температури для термочутливої структури, штриховою – для нетермочутливої.

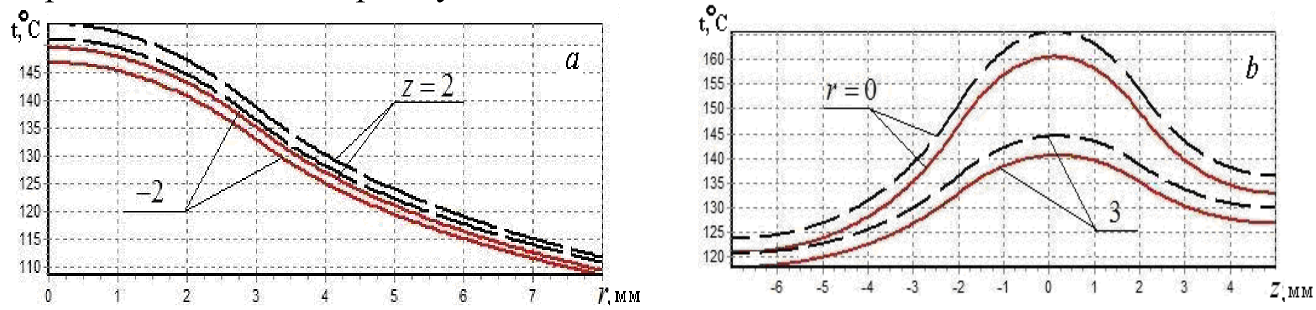

Рис.29. Залежність температури t від радіальної r (a) та аксіальної z (b) координат

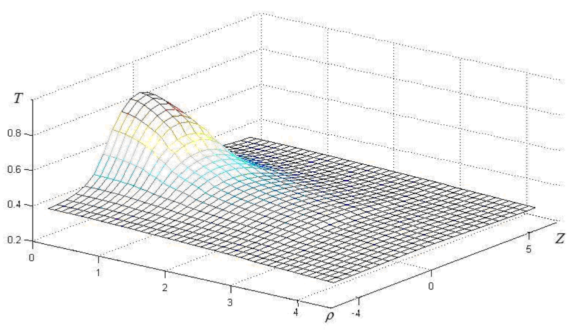

Рис. 30. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірних координат ρ та Z

Визначено температурне поле у термочутливому шарі з наскрізним теплоактивним включенням, на межових поверхнях $K_\pm$ якого задано крайові умови другого роду (рис.10).

Запроваджено функцію

$$\vartheta=\int\limits_0^{t(r,z)}\lambda_1(\zeta)d\zeta+S_-(R-r)\cdot\int\limits_{t(R,z)}^{t(r,z)}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)\right]d\zeta,$$

після диференціювання якої за змінними r та z, одержано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\lambda_0(t) - \lambda_1(t)\right]\frac{\partial t}{\partial z}\right\}\Bigg|_{r=R} \cdot S_-(R-r) = -q_0 S_-(R-r),$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{|z|=l} = 0, \ \left.\vartheta\right|_{r\to\infty} = 0, \ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = 0.$$

Отримано розрахункові формули для обчислення значень безрозмірної температури у наведеній структурі із залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16) та зображено її розподіл за просторовими безрозмірними координатами на графіку (рис.31).

Далі розглянуто ізотропний термочутливий кусково-однорідний шар, який складається з n різнорідних елементів, що відрізняються геометричними і теплофізичними параметрами, одному з яких є чужорідне циліндричне включення з радіусом R та висотою, що дорівнює товщині цього елемента, віднесений до циліндричної системи координат (r,φ,z) із початком на одній з його межових поверхонь.

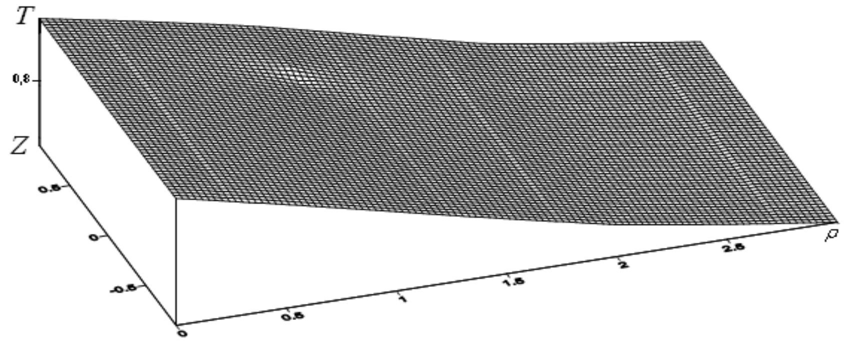

Рис. 31. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірних координат ρ та Z

В області $\Omega_0 = \{(r,\varphi,z): r \le R, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, z_{j-1} \le z < z_j, j = \overline{2,n-1}\ \}$ включення діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0. На поверхнях елементів $K_i = \{(r,\varphi,z_i): 0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ $(i = \overline{1,n-1})$ шару та включення $L_R = \left\{(R,\varphi,z): 0 \le \varphi \le 2\pi, z_{j-1} \le z < z_j, j = \overline{2,n-1}\right\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару $K_0 = \{(r,\varphi,0): 0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $K_n = \{(r,\varphi,z_n): 0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис.12).

Запроваджено функцію

$$\vartheta = \int_0^{t(r,z)} \lambda_1(\zeta)d\zeta + \sum_{i=1}^{n-1} S_-(z-z_i)\cdot \int_{t(r,z_i)}^{t(r,z)} \left[\lambda_{i+1}(\zeta) - \lambda_i(\zeta)\right]d\zeta + \left\{ \int_{t(R,z)}^{t(r,z)} \left[\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\right]d\zeta \cdot M(z, z_{j-1}) \right.$$

$$\left. - \int_{t(R,z_{j-1})}^{t(r,z_{j-1})} \left[\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\right]d\zeta \cdot S_-(z-z_{j-1}) + \int_{t(R,z_j)}^{t(r,z_j)} \left[\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\right]d\zeta \cdot S_-(z-z_j) \right\} \cdot S_-(R-r),$$

після диференціювання якої за змінними r та z, отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\Delta\vartheta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\cdot\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left[\lambda_{i+1}(t)-\lambda_i(t)\right]\frac{\partial t}{\partial r}\right\}\right|_{z=z_i}\cdot S_-(z-z_i)+\right.$$

$$\left.+\left[\left[\left(\lambda_0(t)-\lambda_j(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right]\right|_{z=z_{j-1}}\cdot S_-(z-z_{j-1})-\left[(\lambda_0(t)-\lambda_j(t))\frac{\partial t}{\partial r}\right]\right|_{z=z_j}\cdot S_-(z-z_j)\left]\cdot S_-(R-r)\right]\right\}+ \quad (29)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\left[\lambda_0(t)-\lambda_j(t)\right]\frac{\partial t}{\partial z}\right]\right|_{r=R}\cdot S_-(R-r)\cdot M(z,z_{j-1})\right\}=-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot M(z,z_{j-1}),$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\Big|_{z=0}=\alpha_0(t\big|_{z=0}-t_c),\ \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\Big|_{z=z_n}=-\alpha_n(t\big|_{z=z_n}-t_c),\ \vartheta\big|_{r\to\infty}=0,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\Big|_{r\to\infty}=0 \qquad (30)$$

і одержано її наближений аналітичний розв’язок. Розглянуто триелементний шар із включенням у середньому елементі та залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (15). Отримано розрахункові формули для обчислення значень температури у поданій структурі.

Визначено температурне поле у термочутливому кусково-однорідному шарі з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням, на межових поверхнях K_0, K_n якого задано крайові умови другого роду (рис.15).

Запроваджено функцію

$$\vartheta=\sum_{i=1}^{n}\{\int_0^{t(r,z)}\lambda_i(\zeta)d\zeta N(z,z_{i-1})+S_-(R-r)[N(z,z_{i-1})\int_{t(R,z)}^{t(r,z)}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_i(\zeta))d\zeta-\int_{t(R,z_{i-1})}^{t(r,z_{i-1})}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_i(\zeta))d\zeta S_+(z-z_{i-1})+$$

$$+\int_{t(R,z_i)}^{t(r,z_i)}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_i(\zeta))d\zeta\cdot S_+(z-z_i)]-\int_0^{t(r,z_{i-1})}\lambda_i(\zeta)d\zeta\cdot S_+(z-z_{i-1})+\int_0^{t(r,z_i)}\lambda_i(\zeta)d\zeta\cdot S_+(z-z_i)\},$$

після диференціювання якої за змінними r та z, отримано частково лінеаризовану крайову задачу

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial\vartheta}{\partial r}]+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\cdot\Phi_1(r,z)]+\frac{\partial}{\partial z}[\Phi_2(r,z)]=-q_0\cdot S_-(R-r),$$

$$\vartheta\Big|_{r\to\infty}=0,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\Big|_{r\to\infty}=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\Big|_{z=z_n}=0,$$

де

$$\Phi_1(r,z)=\sum_{i=1}^{n}[(\lambda_i(t)\frac{\partial t}{\partial r})\Big|_{z=z_{i-1}}\cdot S_+(z-z_{i-1})-(\lambda_i(t)\frac{\partial t}{\partial r})\Big|_{z=z_i}\cdot S_+(z-z_i)],$$

$$\Phi_2(r,z)=S_-(R-r)\cdot\sum_{i=1}^{n}[(\lambda_0(t)-\lambda_i(t))\frac{\partial t}{\partial z}]\Big|_{r=R}\cdot N(z,z_{i-1}).$$

Одержано розрахункові формули для обчислення значень температури у двохелементному шарі із залежністю коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури у вигляді виразу (16).

ВИСНОВКИ

У роботі вирішено нову науково-прикладну проблему підвищення точності розрахунку температурних полів та ефективності методів проектування нових пристроїв сучасної техніки завдяки створенню лінійних і нелінійних математичних моделей процесу теплопровідності для кусково-однорідних структур і розробленню методів розв´язування відповідних крайових задач.

1. На підставі результатів аналізу проблеми моделювання теплоперенесення для однорідних і неоднорідних структур обґрунтовано необхідність створення нових лінійних та нелінійних математичних моделей процесу теплопровідності для кусково-однорідних структур і розроблення методів розв'язування відповідних крайових задач.
2. Вперше, завдяки опису коефіцієнта теплопровідності для всієї структури як єдиного цілого за допомогою узагальнених функцій, розроблено лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для двовимірних однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур із метою точніших розрахунків розподілу температури за просторовими координатами.
3. Вперше інтегральними перетвореннями Фур'є та Ганкеля, завдяки кусково-лінійній апроксимації температури за допомогою узагальнених функцій на межових поверхнях чужорідних включень, отримано аналітично-числові розв'язки лінійних крайових задач теплопровідності у замкнутому вигляді для двовимірних однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур із метою визначення температурних полів.
4. Вперше запроваджено нові перетворення, що для однорідних тіл стають перетворенням Кірхгофа, які дають змогу здійснити часткову лінеаризацію вихідних нелінійних диференціальних рівнянь теплопровідності для двовимірних термочутливих шаруватих і однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур.
5. Вперше інтегральними перетвореннями Фур'є та Ганкеля, завдяки кусково-лінійній апроксимації температури за допомогою узагальнених функцій на поверхнях різнорідних шарів і чужорідних включень, одержано наближені аналітичні розв'язки лінеаризованих крайових задач для визначення запроваджених функцій, що дало змогу отримати розподіл температури за просторовими координатами у двовимірних термочутливих шаруватих, однорідних та шаруватих із чужорідним включенням структур із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури.
6. Лінеаризовано нелінійну математичну модель процесу теплопровідності для тривимірної термочутливої структури з малим чужорідним теплоактивним включенням за допомогою перетворення Кірхгофа, завдяки запровадженим із використанням узагальнених функцій зведеним теплофізичним параметрам.
7. Отримано інтегральним перетворенням Фур'є наближений аналітичний розв'язок лінеаризованої крайової задачі для визначення змінної Кірхгофа, що

дало змогу визначити розподіл температури за просторовими координатами у тривимірній структурі з малим чужорідним теплоактивним включенням із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури.

8. Створено за допомогою запроваджених зведених теплофізичних величин лінійні математичні моделі процесу теплопровідності для тривимірних структур із малим і тонким чужорідним теплоактивним включенням.
9. Отримано методом інтегрального перетворення Фур'є, завдяки кусково-лінійній апроксимації температури із використанням узагальнених функцій на межових поверхнях чужорідного включення, аналітично-числові розв'язки лінійних крайових задач теплопровідності для тривимірної структури із тонким чужорідним теплоактивним включенням для визначення розподілу температури за просторовими координатами.
10. Отримано методом інтегрального перетворення Фур'є наближений аналітичний розв'язок лінійної крайової задачі теплопровідності для тривимірної структури із малим чужорідним теплоактивним включенням для визначення розподілу температури за просторовими координатами.
11. Розроблено алгоритми і програмні засоби їхньої числової реалізації алгоритмічними мовами C++ та C# для аналізу температурних режимів у кусково-однорідних структурах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гавриш В. І. Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах: монографія / В. І. Гавриш, Д. В. Федасюк. – Львів : В-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2012. – 176 с.
2. Havrysh V. I. Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion / Havrysh V. I., Kosach A. I. // Materials Science. – 2012. – 47, No 6. – P. 773-782.
3. Havrysh V. I. Boundary-value problem of heat conduction for a layer with foreign cylindrical inclusion / Havrysh V. I., Fedasyuk D. V., Kosach A. I. // Material Science. – 2011. – 46, No 5. – P. 702-708.
4. Gavrysh V. I. Thermal state modelling in thermosensitive elements of microelectronic devices with reach-through foreign inclusions / Gavrysh V. I. // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2012. – 15, No 3. – P. 247-251.
5. Gavrysh V. Modelling the temperature conditions in the three-dimensional piecewise homogeneous elements of microelectronic devices / Gavrysh V. I. // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2011. – 14, No 4. – P. 478-482.
6. Gavrysh V. I. Thermal simulation of heterogeneous structural components in microelectronic devices / Gavrysh V. I., Fedasyuk D. V. // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2010. – 13, No 4. – P. 439-443.
7. Гаврыш В. И. Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями / Гаврыш В. И. // Электронное моделирование. – 2012. – 34, №

4.– С. 99-107.

8. Гавриш В. И. Моделирование температурных режимов в электронных устройствах кусочно-однородной структуры / Гаврыш В. И., Косач А. И. // Электронное моделирование. – 2011. – 33, №4. – С. 99-113.
9. Гавриш В. І. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням / Гавриш В. І., Федасюк Д. В. // Промышленная теплотехника. – 2010. – 32, № 5. – С. 18-25.
10. Барвінський А. Ф. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла / Барвінський А. Ф., Гавриш В. І. // Проблемы машиностроения. – 2009. – 12, № 1. – С. 47-53.
11. Гаврыш В. И. Моделирование температурних режимов в элементах микроэлектронных устройств / Гаврыш В. И., Косач А. И. // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2011. – № 1-2 (90). – С. 27-30.
12. Гавриш В. Моделювання температурних режимів у мікроелектронних пристроях із наскрізними чужорідними включеннями / Гавриш В. // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2012. – №8. – С. 140-146.
13. Гавриш В. І. Рівняння термопружності для багатошарової смуги з включенням прямокутної форми / Гавриш В. І. // Машинознавство. – 2002. – №12 (66). – С. 21-27.
14. Коляно Ю. М. Температурное поле в термочувствительном многослойном полупространстве / Коляно Ю. М., Волос В. О., Иваник Е. Г., Гаврыш В. И. // Инж.-физ. журнал. –1994. – 66, № 2. – С. 226-234.
15. Коляно Ю. М. Температурное поле в многослойном полупространстве с инородним тепловыделяющим цилиндрическим включением / Коляно Ю. М., Кричевец Ю. М., Иваник Е. Г., Гаврыш В. И. // Промышленная теплотехника. – 1994. – 16, № 4-6. – С. 30-34.
16. Гавриш В. І. Моделювання температурних режимів у термочутливому шарі з тепловиділяючим включенням паралелепіпедної форми малих розмірів / Гавриш В. І. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2010.– № 672. – С. 104-109.
17. Гавриш В. І. Моделювання теплових режимів в термочутливій кусково-однорідній смузі з внутрішніми джерелами тепла / Гавриш В. І., Федасюк Д. В. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика. – 2009. – № 651. – С. 50-54.
18. Гавриш В. Моделювання теплового стану в термочутливому елементі потужного світлодіода / Гавриш В., Косач А. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 694. – С. 254-259.
19. Гавриш В. Моделювання температурних режимів у термочутливому вузлі мікроелектронних пристроїв / Гавриш В., Косач А., Нога Ю. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 710.– С. 79-84.
20. Гавриш В. Моделювання температурних режимів у плоских елементах мікроелектронних пристроїв із наскрізними чужорідними включеннями / Гавриш В., Нитребич О. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка":

Комп'ютерні науки та інформаційні технології.– 2012. – № 732. – С. 185-189.

21. Гавриш В. Моделювання теплового стану в елементах мікроелектронних пристроїв із наскрізними чужорідними включеннями / Гавриш В., Нитребич О. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології.– 2011. –№ 719.– С. 144-148.
22. Гавриш В. Моделювання теплових режимів у термочутливому кусково-однорідному шарі з чужорідним тепловиділяючим включенням / Гавриш В., Федасюк Д. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2010.–№663.– С. 84-90.
23. Гавриш В. Моделювання теплових режимів у термочутливому шарі з тепловиділяючим чужорідним включенням / Гавриш В., Федасюк Д. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – № 650. – С. 94-99.
24. Гавриш В. І. Побудова розв'язку задачі теплопровідності для неоднорідного шару / Гавриш В. І. // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Диференціальні рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 24-29.
25. Гавриш В. Задача теплопровідності для смуги із включенням прямокутної форми / Гавриш В., Волос В. // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Прикладна математика.– 1997. – №320. – С. 28-33.
26. Гавриш В. Задача теплопровідності для кусково-однорідного шару із включенням циліндричної форми / Гавриш В., Волос В. // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Прикладна математика. – 1998. – № 341. – С. 61-68.
27. Гавриш В. І. Рівняння термопружності для смуги із включенням прямокутної форми / В. І. Гавриш, В. О. Волос // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 194-199.
28. Гавриш В. І. Задача теплопровідності для кусково-однорідної смуги із включенням прямокутної форми / Гавриш В. І. // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Прикладна математика. – 1999. – № 364. – С. 67-74.
29. Fedasyuk D. Modelling of temperature conditions in electrical devices of inhomogeneous structure / Fedasyuk D., Gavrysh V. // Computational Problems of Electrical Engineering. – 2012. – 2, No 1. – P. 25-28.
30. Fedasyuk D. Heat exchange simulation for layer with heat-releasing parallelepiped-shape insertion / Fedasyuk D., Gavrysh V., Kuzmin A. // Proceedings of the Xth International Conference "The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics". – 2009. – P. 26-28.
31. Gavrysh V. Modeling temperature conditions in the spatial elements of microelectronics devices with thin foreign thermo-active reach-through inclusions / Gavrysh V. // Proceedings of the VIIIth International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, 18-21 April 2012 – Polyana, – Lviv: Publisher Lviv Polytechnic, – 2012. – P. 18-19.
32. Гавриш В. І. Рівняння термопружності для багатошарової смуги з включенням прямокутної форми / Василь Гавриш // Четвертий Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові, 19-21 травня 1999 р. – Львів, – 1999. – С. 56-57.
33. Гавриш В. Температурне поле для кусково-однорідного шару із циліндричним включенням / Василь Гавриш, Валерій Волос, Володимир Валяшек //

Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки і математики", присвячена 70-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 25-річчю заснованого ним Інституту прикладних проблем механіки і математики 25-28 травня 1998 року. Матеріали. – Львів, 1998. – С. 212-213.

34. Гаврыш В. И. Моделирование температурных режимов в микроэлектронных устройствах кусочно-однородной структуры со сквозными тепловыделяющими инородными включениями / Гаврыш В. И. // Труды XIII Международной научно-практической конференции. "Современные информационные и электронные технологии", 4-8 июня 2012 г. – Одесса, 2012. – С. 211.
35. Гаврыш В. И. Моделирование тепловых процессов в элементах микроэлектронных устройств с тепловыделяющими инородными включениями / Гаврыш В. И., Косач А. И. // Труды XII Международной научно-практической конференции. "Современные информационные и электронные технологии", 23-27 мая 2011 г. – Одесса, 2011. – С. 224.
36. Гавриш В. І. Крайова нелінійна задача теплопровідності для кусково-однорідної термочутливої смуги з чужорідним наскрізним теплоактивним прямокутним включенням / Гавриш В. І., Лисий І. П. // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., К.: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ "КПІ", 2012.– С. 121.
37. Гавриш В. І. Нелінійна просторова гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним тепловиділяючим тонким включенням / Гавриш В. І., Федасюк Д. В. // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 трав. 2010 р., К. : Матеріали конф. Т.2. – К.: НТУУ, 2010. – С. 84.
38. Федасюк Д. Нелінійна задача теплообміну для кусково–однорідної смуги з чужорідним включенням / Федасюк Д., Гавриш В., Кузьмін А. // Нелінійні проблеми аналізу: IV Всеукраїнська наукова конференція. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Плай, 2008. – С. 98.
39. Гавриш В. І. Стаціонарна задача теплопровідності для теплочутливого шару / Гавриш В. І., Процик М. Т., Зазуляк П. М. // Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 18-20 трав. 2006 р., К.: Матеріали конф. – К.: ТОВ "Задруга", 2006. – С. 62.
40. Гавриш В. І. Нелінійна осесиметрична задача теплопровідності для шару з включенням циліндричної форми / Гавриш В. І., Процик М. Т., Зазуляк П. М. // Десята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 трав. 2004 р., К.: Матеріали конф. – К.: Задруга, 2004. – С. 68.
41. Федасюк Д. В. Нелінійна осесиметрична задача теплопровідності для кусково-однорідного шару з включенням циліндричної форми / Федасюк Д. В., Гавриш В. І., Кузьмін А. О. // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15-17 трав. 2008 р., К.: Матеріали конф. – К.: ТОВ "Задруга", 2008. – С.404.
42. Гавриш В. І. Температурне поле у смузі із хрестовидним включенням / Гавриш В. І., Валяшек В. Б. // IV Міжнародна конференція з механіки

неоднорідних структур, 19-22 вересня 1995 р. Тези доповідей. – Тернопіль, 1995. – С. 201.

43. Гавриш В. І. Визначення температурного поля в окремому елементі інтегральної схеми / В. І. Гавриш, М. М. Волошин // Перша Міжнародна конференція "Конструкційні та функціональні матеріали" КФН'93. Теорія, експеримент, взаємодія. Тези доповідей. Вересень, 20-23, 1993.– Львів, 1993. – С. 32-33.
44. Гавриш В. Узагальнене диференціальне рівняння теплопровідності для смуги із системою включень / Василь Гавриш, Валерій Волос // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-15 жовтня 1994 року, Чернівці): Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 1994. – С. 167.
45. Федасюк Д. Нелінійна гранична задача теплообміну для смуги з включенням / Дмитро Федасюк, Василь Гавриш, Андрій Кузьмін // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. – Львів, 2008. – Т.1. – С. 259-262.
46. Гавриш В. І. Моделювання нелінійних теплових процесів для кристалу на багатошаровій підкладці / Гавриш В. І., Федасюк Д. В., Косач А. І. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції м. Вінниця, 19-21 трав. 2010 р. – м. Вінниця: ВНТУ, 2010. – С. 291-292.
47. Gavrysh V. Mathematical and software analysis of temperature regimes for cross-cuttingelements of the IEP with foreign inclusions / Gavrysh V., Nytrebych O., Ahibalov O., Noha Y. // Computer Science and Information Technologies. Materials of the VIth International Scientific and Technical Conference,CSIT 2011, 16-19 November 2011. – Lviv: Publisher House Vezha & Co., 2011. – P. 122-123.
48. Федасюк Д. В. Моделювання температурних полів у термочутливому шарі з тепловиділяючим включенням паралелепіпедної форми / Федасюк Д. В., Гавриш В. І. // Восьмая конференция "Математическое моделирование и информационные технологии", 20-21 ноября 2008 г. : Сборник тезисов. – Одесса, 2008 – С. 54.
49. Гавриш В. І. Моделювання температурних режимів у конструктивних елементах мікроелектронних пристроїв із чужорідними наскрізними включеннями / Гавриш В. І. // Збірник тез V Української наукової конференції з фізики напівпровідників, 9-15 жовтня 2011р. – Ужгород, 2011. – С. 336-337.
50. Гавриш В. І. Задача теплопровідності для термочутливого кусково-однорідного шару з наскрізним включенням / Гавриш В. І. // Всеукраїнська наукова конференція "Застосування математичних методів в науці і техніці", 25-26 листопада 2011 р. Збірник тез доповідей. – Луцьк, 2011. – С. 20-24.
51. Гавриш В. І. Рівняння теплопровідності для багатошарової смуги із гладкими межами розділу / В. І. Гавриш // Всеукраїнська наукова конференція (24-26 вересня 1996 р., м. Львів). Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях. Тези доповідей. – Львів, 1996. – С. 17.
52. Гавриш В. Задача теплопровідності для смуги із хрестовидною неоднорідністю / Василь Гавриш // Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях", присвячена 70-річчю від дня народження професора

П.С.Казімірського (5-7 жовтня 1995 р.). Тези доповідей. – Ч. 2. – Львів, 1995. – С. 72.

53. Гавриш В. Математичне моделювання процесів теплопровідності в неоднорідній смузі / В. Гавриш // Всеукраїнська наукова конференція (4-6 жовтня 1994 р., м. Львів). Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях. Тези доповідей. – Львів, 1994. – С. 23.
54. Гавриш В. І. Математичне моделювання процесу теплопровідності для смуги із хрестоподібною двокомпонентною неоднорідністю / В. І. Гавриш, В.М. Мищишин // Всеукраїнська наукова конференція (19-21 вересня 1995 р., м.Львів). Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях. Тези доповідей. – Львів, 1995. – С. 17.

АНОТАЦІЇ

Гавриш В.І. Математичні моделі процесу теплопровідності для кусково-однорідних структур із урахуванням термочутливості. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет "Львівська політехніка", Львів, 2013.

Дисертація присвячена створенню лінійних та нелінійних математичних моделей процесу теплопровідності для шаруватих, однорідних і шаруватих із чужорідним включенням структур. Розвинено теорію методів лінеаризації нелінійних крайових задач теплопровідності для термочутливих кусково-однорідних структур завдяки запровадженню нових перетворень, які для однорідних тіл стають перетворенням Кірхгофа, що дають змогу частково лінеаризувати вихідні нелінійні диференціальні рівняння, подальшу лінеаризацію яких і крайових умов виконано за допомогою кусково-лінійної апроксимації температури із використанням узагальнених функцій на поверхнях спряження чужорідних конструкційних елементів. Інтегральними перетвореннями Фур'є і Ганкеля отримано аналітично-числові розв'язки частково лінеаризованих задач для визначення запроваджених функцій, завдяки яким одержано співвідношення, що виражають розподіл температури за просторовими координатами у наведених структурах із конкретними залежностями коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури. На основі отриманих аналітично-числових розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності розроблено алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу температурних режимів у кусково-однорідних структурах.

Ключові слова: математичне моделювання, процес теплопровідності, кусково-однорідна структура, термочутливість, лінеаризація, конвективний теплообмін, ідеальний тепловий контакт, теплоактивне чужорідне включення.

Гаврыш В.И. Математические модели процесса теплопроводности для кусочно-однородных структур с учетом термочувствительности. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет "Львовская политехника", Львов, 2013.

Диссертация посвящена созданию линейных и нелинейных математических моделей процесса теплопроводности для слоистых, однородных и слоистых с инородным включением структур. Развита теория методов линеаризации нелинейных граничных задач теплопроводности для термочувствительных кусочно-однородных структур с помощью введенных новых преобразований, которые для однородных тел стают преобразованием Кирхгофа, и позволяют частично линеаризовать исходные нелинейные дифференциальные уравнения, дальшейшая линеаризация которых и граничных условий проведена кусочно-линейной аппроксимацией температуры с использованием обобщенных функций на поверхностях сопряжения инородных конструкционных элементов. Интегральными преобразованиями Фурье и Ханкеля получены аналитически-числовые решения частично линеаризованных задач для определения введенных функций, с помощью которых получены соотношения, что определяют распределение температуры в рассматриваемых структурах с конкретными зависимостями коэффициента теплопроводности конструкционных материалов от температуры. На основе полученных аналитически-числовых решений линейных и нелинейных граничных задач теплопроводности разработаны алгоритмы и програмные средства их численной реализации для анализа температурных режимов в кусочно-однородных структурах.

Ключевые слова: математическое моделирование, процесс теплопроводности, кусочно-однородная структура, термочувствительность, линеаризация, конвективный теплообмен, идеальный тепловой контакт, теплоактивное инородное включение.

Gavrysh V.I. Mathematical models of heat conduction process for piecewise-homogeneous structures subject to thermal sensitivity. – Manuscript.

The thesis for academic degree of doctor of technical sciences, speciality 01.05.02 – Mathematical Modelling and Calculation Methods. – Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2013.

The thesis is dedicated to creation of linear and nonlinear mathematical models of the process of heat conduction for layered homogeneous and layered with foreign inclusions structures. Due to introduction of new transformations which for homogeneous bodies become Kirchhoff's transformations which enable us to partially linearize initial differential equations, a theory of methods of linearization of non-linear boundary value problems of heat conduction for thermo-sensitive piecewise homogeneous structures has been developed; further linearization of them and of the boundary conditions has been carried out with a help of piecewise linear approximation of temperature with a use of generalized functions at the mated surfaces of foreign elements of structure. By Fourier and Henkel's integral transformations, analytical-numerical solutions of partially linearized problems for determination of introduced functions due to which there are obtained relations which express temperature fields in the aforesaid structures with concrete dependences of heat conductivity of structure materials on temperature are obtained. On the basis of obtained analytical-numerical

solutions of linear and non-linear boundary value problems of heat conduction, algorithms and software of their numerical implementation for the analysis of temperature regimes in piecewise homogeneous structures are obtained.

In the first section, the problem of modeling of heat transfer for homogeneous bodies and homogeneous bodies of different dimensionality and geometric shape is presented; a review of main literature sources in the aspect of creation of linear and non-linear mathematical models of the process of heat conduction and in the aspect of development of solving the boundary value problems and initial-boundary value problems has been made. This has shown that the process of heat propagation in two- and three dimensional piecewise-homogeneous structures remains to be poorly investigated.

In the second section, there are presented linear mathematical models of the process of heat conduction for an infinite plate and for the multi-layer infinite plate with heat insulted face surfaces and with parallelepipedon-shaped foreign inclusions, at one of the boundary surfaces of these layers there is heat flow concentrated, on the other convective heat exchange with the outer medium according to Newton’s law; on the mated surfaces of the foreign bodies conditions of ideal heat are set. With help of Fourier integral transformation, due to piecewise linear approximation of temperature on mated surfaces of the inclusion, analytical-numerical solutions of corresponding boundary value problems are obtained. For these problems, in case when a foreign inclusion is heat-active and through, second-type boundary conditions are observed is also considered.

In the third section, there are presented linear mathematical models of the process of heat conduction for a layer and piecewise-homogeneous layer with an heat-active cylindrical foreign inclusion, at the boundary surfaces of these layers conductive heat exchange with a outer medium proceedes and at mated surfaces of the foreign inclusions conditions of ideal heat contact are set. With a help of Henkel’s integral transformation, due to piecewise linear approximation of temperature on mated surfaces of inclusions, analytical-numerical solutions of corresponding boundary value problems are obtained. For the suggested structures, in case when a foreign inclusion is through and at boundary surfaces second-type the boundary conditions are observed is also considered.

In the fourth section, there are given linear and non-linear mathematical models of the process of heat conduction for a layer with a small and thin inclusion, at boundary surfaces of the layer there proceed convective heat exchange with outer medium and second-kind boundary conditions are set; and at the surfaces of the inclusion, ideal heat contact takes place. Due to introduction of reduced thermal parameters for the case of a small and thin inclusion, the initial differential equations are considerably simplified, this enables us to apply Fourier integral transformation and, as result, to obtain analytical-numerical solutions of corresponding linear boundary problems. The solution of non-linear boundary problem is obtained with a help of Kirchhoff’s transformation and Fourier transformation with concrete dependences of heat conductivity on the temperature.

In the fifth section, there are given non-linear mathematical models of the process of heat conduction for a layered structures which are heated locally by a concentrated internal source of heat on the boundary surfaces of which convective heat exchange with the outer medium is set; and at the mated surfaces of different substances ideal heat contact takes place. With a help of suggested new transformations which for homogeneous solids become Kirchhoff's transformations, the initial differential equations are partially linearized. Due to piecewise linear approximations of temperature at boundary surfaces of structures and at the mated surfaces of different elements, problems are perfectly linearized; this enables us to apply method of integral transformation and to obtain solutions for determination of the suggested functions, concrete dependences of conductivity on the temperature are considered for constructional materials of three-layer structures; relations for finding the temperature fields are obtained.

In the sixth section, there are presented mathematical models of the process of heat conduction for an infinite plate and for a multi-layered infinite plate with heat-insulted face surfaces containing foreign heat-active parallelepipedon-shaped inclusions at the boundary surfaces of which convectional heat exchange with outer medium takes place and at the mated surfaces of different substances ideal heat contact is set. With a help of suggested new transformations, piecewise linear approximation of temperature at boundary surfaces and at mated surfaces of different substances and method of integral transformations, formulae for determination of the temperature fields with concrete dependencies of the heat conductivity on the temperature are obtained for constructional materials of homogeneous and three-layer with foreign inclusions structures.

In the seventh section, there are given mathematical models of the process of heat conductions for a layer and a piecewise homogeneous layer containing a foreign heat-active cylindrical inclusion. Analogically, as in the sixth section, formulae for determination of the temperature fields with concrete dependencies of heat conductivity on temperature are obtained for constructional materials.

Key words: mathematical modeling, heat conduction process, piecewise homogeneous structures, thermo sensitivity, linearization, convective heat transfer, ideal heat contact, heat-active foreign inclusion.