УДК 528.1

В.А. Рябчій, В.В. Рябчій
Державний вищий навчальний заклад “Національний гірничий університет”

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНІШОГО ЗНАЧЕННЯ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

Установлено, что при математической обработке результатов неравноточных измерений одной величины можно вычислять не только общую арифметическую середину, а и вероятную арифметическую середину, которая обладает важными свойствами. Также предлагается при оценке точности определять среднюю квадратическую ошибку единицы веса уравненных значений измерений.

Found that when the mathematical treatment of the results of measurements of values can be calculated not only the overall arithmetic middle, and probable arithmetic middle that has important properties. It is also proposed to determine the accuracy in estimating the middle quadratic error of unit weight of equations of dimension values.

Постановка проблеми. При нерівноточних вимірюваннях однієї величини обчислюється загальна арифметична середина, яка вважається ймовірнішим значенням виміряної величини. Загальна арифметична середина, як добре відомо, має позитивні властивості, а саме:

$$[pv]=0 \tag{1}$$

і

$$[pvv]=\min , \tag{2}$$

де p – вага виміру; v – відхилення значення виміряної величини x_i від загальної арифметичної середини $\bar{x}$, яке знаходиться за формулою:

$$v_i = x_i - \bar{x}. \tag{3}$$

Крім цього, з усіх можливих значень виміряної величини загальна арифметична середина має найбільшу вагу і найліпшу оцінку точності. Усе це не визиває сумніву, але вважати, що загальна арифметична середина – це найближче до істинного значення виміряної величини, не зовсім вірно.

Відомо, якщо є ряд істинних похибок нерівноточних вимірів, то його можна привести до рівноточного, помноживши кожну нерівноточну похибку на корінь квадратний з ваги відповідного виміру. Відхилення v_i можна назвати поправками до виміряних величин. Приймемо, що поправки близькі або дорівнюють істинним похибкам. Тоді повинна виконуватись така умова

$$[v\sqrt{p}]=0 . \tag{4}$$

Але, якщо для знаходження поправок використовується загальна арифметична середина, то умова (4) не буде виконуватись, оскільки вже виконується умова (1).

Можна припустити, що значення виміряної величини, за якого виконується умова (4), буде більше наближеним до її істинного значення, ніж загальна арифметична середина. Тому уточнення обчислення і обґрунтування ймовірнішого значення з нерівноточних вимірів однієї величини є важливою задачею, насамперед теоретичного плану. Крім цього, це дасть змогу провести додаткові дослідження результатів вимірів і математичної обробки нерівноточнимх вимірів однієї величини.

Зв'язок із важливими науковими і практичними завданнями. Результати математичної обробки результатів рівноточних і нерівноточних вимірів однієї величини завжди використовуються при геодезичних роботах та у подальшому вирівнюванні виміряних величин, які пов'язані між собою функціональними залежностями.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми. Математичну обробку результатів рівноточних і нерівноточних вимірів однієї величини наведено майже у всіх підручниках, навчальних посібниках і монографіях, де викладено теорію похибок вимірювань. Тому обмежимося лише декількома посиланнями, зокрема [1–3, 5–7] та ін.

Невирішені частини загальної проблеми. Якщо розглядати значення загальної арифметичної середини з позиції найбільшої ваги, то кращого значення немає. Але враховуючи, що при використанні загальної арифметичної середини не виконується умова (4), можна припустити, що загальна арифметична середина – не та величина, яка є найближчою до істинного значення.

Постановка завдання проблеми. Мета статті полягає у тому, щоб у діапазоні виміряних величин знайти та дослідити таке значення, при якому умова (4) виконується.

Виклад основного матеріалу. Для розгляду візьмемо якусь величину, істинне значення якої позначимо через X. Ця величина вимірювалась нерівноточно n разів. Отримані результати вимірів

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{5}$$

з вагами

$$p_{x_1}, p_{x_2}, \cdots, p_{x_n}\,. \tag{6}$$

При цьому ці ваги не дорівнюють одна одній, тобто

$$p_{x_1} \neq p_{x_2} \neq \cdots \neq p_{x_n}\,. \tag{7}$$

Відхилення кожного результату виміру від якогось, поки ще не відомого, значення, яке позначимо через $\dot{x}$, буде обчислюватись за формулою

$$\dot{v}_i = x_i - \dot{x}\,. \tag{8}$$

Тоді умову (4) можна записати у такому вигляді

$$\left(x_1 - \dot{x}\right)\sqrt{p_{x_1}} + \left(x_2 - \dot{x}\right)\sqrt{p_{x_2}} + \cdots + \left(x_n - \dot{x}\right)\sqrt{p_{x_n}} = 0\,. \tag{9}$$

Розкриємо дужки в (9) і визначимо величину $\dot{x}$

$$\dot{x} = \frac{x_1\sqrt{p_{x_1}} + x_2\sqrt{p_{x_2}} + \cdots + x_n\sqrt{p_{x_n}}}{\sqrt{p_{x_1}} + \sqrt{p_{x_2}} + \cdots + \sqrt{p_{x_n}}} \tag{10}$$

або

$$\dot{x} = \frac{[x\sqrt{p_x}\,]}{[\sqrt{p_x}\,]}\,. \tag{11}$$

Отже, у результаті отримано формулу обчислення такого значення (ймовірна арифметична середина), за якого виконується умова (4).

Перевіримо це. Для цього отримане значення $\dot{x}$ (11) підставимо у (8)

$$\dot{v}_i = x_i - \frac{[x\sqrt{p_x}\,]}{[\sqrt{p_x}\,]}\,. \tag{12}$$

Помноживши ліву і праву частину (12) на $\sqrt{p_{x_i}}$, одержимо

$$\dot{v}_i \sqrt{p_{x_i}} = x_i \sqrt{p_{x_i}} - \frac{[x\sqrt{p_x}]}{[\sqrt{p_x}]} \sqrt{p_{x_i}} \,. \tag{13}$$

Просумуємо ліві і праві частини рівнянь (13) при $i = n$. У результаті сума всіх поправок помножених на корінь квадратний з ваги виміру, дорівнюватиме нулю, тобто умову (4) доведено

$$[\dot{v}\sqrt{p_x}] = 0\,. \tag{14}$$

Розглянемо приклад. У табл. 1 наведено дані нерівноточних вимірів однієї довжини. Для скорочення записів значень довжин у табл. 1 наведені лише останні метри і міліметри, а кількість вимірів дорівнює десяти.

Обчислення загальної арифметичної середини, середньої квадратичної похибки одиниці ваги і середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини зроблено за класичною методикою розрахунків [1–3, 5–7 та ін.] (стовпці 1–10). При цьому умова (1) виконується (стовпець 7 табл. 1), а умова (4) – ні (стовпець 12 табл. 1).

Таблиця 1

Обчислення загальної арифметичної середини

№ з/п	x_i, *м*	p_{x_i}	$p_{x_i}\, x_i$, *м*	$\bar{x}$, *м*	v_i, *мм*	$p_{x_i}\, v_i$, *мм*	$p_{x_i}\, v_i v_i$, *мм*^{2}	μ, *мм*	$m_{\bar{x}}$, *мм*	$\sqrt{p_{x_i}}$	$v_i\sqrt{p_{x_i}}$, *мм*	p_{v_i}	$p_v\, v$, *мм*	$p_v\, vv$, *мм*^{2}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,151	2,1	2,417	1,1741	-23,05	-48,41	1115,77	25,10	4,45	1,45	-33,40	1,97	-45,41	1046,65
2	1,164	2,4	2,794		-10,05	-24,12	242,42			1,55	-15,57	2,23	-22,43	225,41
3	1,169	2,7	3,156		-5,05	-13,64	68,87			1,64	-8,30	2,49	-12,57	63,48
4	1,192	4,7	5,602		17,95	84,36	1514,30			2,17	38,91	4,09	73,50	1319,31
5	1,178	3,8	4,476		3,95	15,01	59,28			1,95	7,70	3,39	13,41	52,95
6	1,184	4,1	4,854		9,95	40,79	405,88			2,02	20,15	3,63	36,13	359,53
7	1,175	3,7	4,348		0,95	3,51	3,34			1,92	1,83	3,31	3,15	2,99
8	1,154	2,3	2,654		-20,05	-46,12	924,63			1,52	-30,41	2,14	-43,01	862,27
9	1,183	3,9	4,614		8,95	34,90	312,38			1,97	17,67	3,47	31,09	278,25
10	1,152	2,1	2,419		-22,05	-46,31	1021,05			1,45	-31,95	1,97	-43,44	957,80
$\sum$		31,8	37,335		38,50	0,00	5667,92			17,65	-33,37	28,71	9,57	5168,64

Необхідно зауважити, що значення величин у деяких комірках табл. 1 і 2 наведено з округленням до другого знака після коми, але для розрахунків використовували більшу кількість знаків після коми.

У табл. 2 (стовпці 1–11) розраховано ймовірну арифметичну середину за формулою (10), середню квадратичну похибку одиниці ваги і середню квадратичну похибку ймовірної арифметичної середини за наведеними нижче формулами відповідно:

$$\dot{\mu} = \sqrt{\frac{\left[p_x \dot{v}\dot{v}\right]}{n-1}}\,, \tag{15}$$

$$m_{\dot{x}} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{[p_x]}}\,. \tag{16}$$

Таблиця 2

Обчислення ймовірної арифметичної середини

№ з/п	x_i, м	p_{x_i}	$\sqrt{p_{x_i}}$	$\sqrt{p_{x_i}}\, x_i$, м	$\dot{x}$, м	$\dot{v}$, мм	$p_x \dot{v}$, мм	$p_x \dot{v}\dot{v}$, мм^2	$\dot{\mu}$, мм	$m_{\dot{x}}$, мм	$\sqrt{p_x}\, \dot{v}$, мм	$\sqrt{p_x}\, \dot{v}\dot{v}$, мм^2	$p_{\dot{v}_i}$	$p_{\dot{v}_i} \dot{v}$, мм	$p_{\dot{v}} vv$, мм^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1,151	2,1	1,45	1,6680	1,1722	-21,16	-44,43	940,20	25,35	4,49	-30,66	648,80	1,97	-41,63	880,81
2	1,164	2,4	1,55	1,8033		-8,16	-19,58	159,78			-12,64	103,14	2,23	-18,18	148,35
3	1,169	2,7	1,64	1,9209		-3,16	-8,53	26,95			-5,19	16,40	2,48	-7,85	24,80
4	1,192	4,7	2,17	2,5842		19,84	93,25	1850,17			43,01	853,42	4,08	81,02	1607,57
5	1,178	3,8	1,95	2,2963		5,84	22,19	129,63			11,39	66,50	3,39	19,78	115,54
6	1,184	4,1	2,02	2,3974		11,84	48,55	574,83			23,98	283,89	3,62	42,90	507,96
7	1,175	3,7	1,92	2,2602		2,84	10,51	29,86			5,46	15,52	3,31	9,39	26,69
8	1,154	2,3	1,52	1,7501		-18,16	-41,77	758,45			-27,54	500,11	2,14	-38,89	706,29
9	1,183	3,9	1,97	2,3362		10,84	42,28	458,33			21,41	232,09	3,47	37,57	407,33
10	1,152	2,1	1,45	1,6694		-20,16	-42,33	853,43			-29,21	588,93	1,97	-39,66	799,52
∑		31,8	17,65	20,6860		-19,59	+60,13	5781,64			0,00	3308,79	28,66	+44,46	5224,85

Значення загальної арифметичної середини і ймовірної арифметичної середини відрізняються на 1,9 мм. Хоча це не велика величина, але все таки існує різниця між значеннями загальної та ймовірної арифметичних середин і при цьому, виконується умова (14), тобто $[\dot{v}\sqrt{p_x}] = 0$ (стовпець 12 табл. 2).

Можна вважати, що отримані значення середніх квадратичних похибок одиниці ваги і загальної арифметичної середини та середніх квадратичних похибок одиниці ваги і ймовірної арифметичної середини приблизно дорівнюють одні одним.

Коли є ряд виміряних значень однієї величини, то визначається значення, яке ми беремо за ймовірніше, тобто таке, яке ймовірно найбільше наближено до істинного значення. При цьому вважається, що істинне значення виміряної величини знаходиться в діапазоні між мінімальним і максимальним виміряними значеннями.

Класичний розв’язок цієї задачі приваблює простим алгоритмом, першою і другою властивістю відхилень результатів вимірів від загальної арифметичної середини і тим, що це значення має найбільшу вагу. Але переважно загальна арифметична середина не може бути тим значенням, яке найбільше наближено до істинного, оскільки не виконується умова (4).

Тепер розглянемо таке. Коли загальна арифметична середина $\bar{x}$ обчислюється за відомою формулою

$$\bar{x} = \frac{[p_x x]}{[p_x]} \tag{17}$$

і поправки за формулою (3), то при обчислені середньої квадратичної похибки одиниці ваги беруться ваги вимірів, а не ваги поправок. Вага поправки p_{v_i} відрізнятиметься від ваги виміру p_{x_i}. Тому визначимо, чому дорівнюватиме вага поправки p_{v_i}.

Обернена вага $\frac{1}{p_{vi}}$ поправки v_i дорівнюватиме

$$\frac{1}{p_{v_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{\bar{x}}}. \tag{18}$$

Враховуючи, що

$$p_{\bar{x}} = [p_x], \tag{19}$$

обернена вага поправки буде

$$\frac{1}{p_{v_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{[p_x]} = \frac{p_{x_i} + [p_x]}{p_{x_i}[p_x]}. \tag{20}$$

Тоді вага поправки буде

$$p_{v_i} = \frac{p_{x_i}[p_x]}{p_{x_i} + [p_x]}. \tag{21}$$

Тепер визначимо вагу поправки, яка обчислюється за формулою (8). Обернена вага $\frac{1}{p_{\dot{v}_i}}$ поправки $\dot{v}_i$ дорівнюватиме

$$\frac{1}{p_{\dot{v}_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{\dot{x}}}. \tag{22}$$

Обернену вагу ймовірної арифметичної середини, яка обчислюється за формулою (10), визначаємо за формулою

$$\frac{1}{p_{\dot{x}}} = \left(\frac{\sqrt{p_{x_1}}}{[\sqrt{p_x}]}\right)^2 \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\sqrt{p_{x_2}}}{[\sqrt{p_x}]}\right)^2 \frac{1}{p_{x_2}} + \ldots + \left(\frac{\sqrt{p_{x_n}}}{[\sqrt{p_x}]}\right)^2 \frac{1}{p_{x_n}} = \frac{n}{[\sqrt{p_x}]^2}. \tag{23}$$

Підставляючи вираз (23) до рівняння (22), отримаємо обернену вагу поправки

$$\frac{1}{p_{\dot{v}_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{n}{[\sqrt{p_x}]^2} = \frac{[\sqrt{p_x}]^2 + p_{x_i} n}{p_{x_i}[\sqrt{p_x}]^2}. \tag{24}$$

Тоді вага поправки $\dot{v}_i$ дорівнюватиме

$$p_{\dot{v}_i} = \frac{p_{x_i}[\sqrt{p_x}]^2}{[\sqrt{p_x}]^2 + p_{x_i} n}. \tag{25}$$

Враховуючи формули (21) і (25), обчислимо ваги поправок та суми $[p_v vv]$ і $[p_{\dot{v}}\dot{v}\dot{v}]$ (стовпці 13–15 і 14–16 табл. 1 і 2 відповідно). Після цього обчислимо середні квадратичні похибки одиниць ваг і середні квадратичні похибки загальної та ймовірної арифметичних середин за наведеними нижче формулами відповідно:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_v vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{5168{,}64}{10-1}} = 23{,}96; \tag{26}$$

$$\dot{\mu} = \sqrt{\frac{[p_{\dot{v}}\dot{v}\dot{v}]}{n-1}} = \sqrt{\frac{5224{,}85}{10-1}} = 24{,}09; \tag{27}$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\bar{x}}}} = \frac{23{,}96}{\sqrt{31{,}8}} = 4{,}25; \tag{28}$$

$$m_{\dot{x}} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{p_{\dot{x}}}} = \dot{\mu}\frac{1}{\sqrt{p_{\dot{x}}}} = \dot{\mu}\sqrt{\frac{n}{[\sqrt{p_{\dot{x}}}]^2}} = 24{,}09\sqrt{\frac{10}{17{,}65^2}} = 4{,}32. \tag{29}$$

Порівнюючи отримані значення, можна побачити, що вони близькі між собою, але декілька менші за значення, одержані за класичними формулами (стовпці 9 і 10 та 10 і 11 табл. 1 і 2 відповідно). При цьому $[p_v v] \neq 0$ і $[p_{\dot{v}}\dot{v}] \neq 0$, оскільки виконуються умови (1) і (4) відповідно.

Отже, традиційно середня квадратична похибка одиниці ваги при математичній обробці результатів вимірів однієї величини обчислюється за відомою формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_x vv]}{n-1}}\,. \tag{30}$$

При цьому для обчислень беруться ваги вимірів попри те, що ваги вимірів не дорівнюють вагам поправок.

У випадку обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за істинними похибками, ваги вимірів дорівнюють вагам цих істинних похибок, тому середня квадратична похибка одиниці ваги обчислюється за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_x \Delta\Delta]}{n}}\,. \tag{31}$$

У цьому випадку жодних питань щодо обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги не виникає.

Тепер розглянемо таке. Якщо у формулі (30) замінимо ваги вимірів на ваги поправок (25), то значення якої величини ми отримаємо? Що вона характеризуватиме і наскільки вона обґрунтована?

Перш ніж робити подальші припущення, наведемо таке. Обчислення середньої квадратичної похибки одного виміру при рівноточних вимірюваннях однієї величини виконується за відомою формулою Бесселя, приймаючи при цьому, що ваги вимірів дорівнюють одиниці. Але вага поправки, яка використовується у формулі Бесселя, не дорівнює одиниці. Обернена вага поправки дорівнюватиме

$$\frac{1}{p_{v_i}} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}\,. \tag{32}$$

Отже, вага поправки буде

$$p_{v_i} = \frac{n}{n+1}\,. \tag{33}$$

Якщо цю вагу враховувати у формулі Бесселя, то формула матиме такий вигляд

$$m = \sqrt{\frac{\frac{n}{n+1}[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{n[vv]}{(n-1)(n+1)}} = \sqrt{\frac{n[vv]}{n^2-1}}\,. \tag{34}$$

Наприклад, при $[vv] = 100$, $n = 10$ (табл. 3) середня квадратична похибка за формулою Бесселя буде

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{100}{10-1}} = 3{,}33\,,$$

а за формулою (34) вона дорівнюватиме

$$m = \sqrt{\frac{n[vv]}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{8\cdot 100}{10^2-1}} = 3{,}18\,.$$

Тобто з використанням ваги поправок результати оцінки точності поліпшуються.

При цьому треба зазначити, що застосування формули (34) значного поліпшення оцінки точності не дає, особливо за збільшення кількості вимірів. Також і саме значення $[vv]$ впливає на оцінку точності. Тому залежно від значення $[vv]$ застосовувати формулу (34) доцільно при кількості вимірів до 20. Це добре видно за результатами, наведеними у табл. 3 і відповідних графіках на рис. 1. Значення середніх квадратичних похибок (табл. 3) були обчислені за формулою Бесселя і (34) при $[vv]$ = 100.

Таблиця 3

Значення середніх квадратичних похибок

Кількість вимірів	Формула Бесселя, мм	Формула (34), мм
2	10,000	8,165
3	7,071	6,124
4	5,774	5,164
5	5,000	4,564
6	4,472	4,140
7	4,082	3,819
8	3,780	3,563
9	3,536	3,354
10	3,333	3,178
15	2,673	2,588
20	2,294	2,239
25	2,041	2,002
30	1,857	1,827

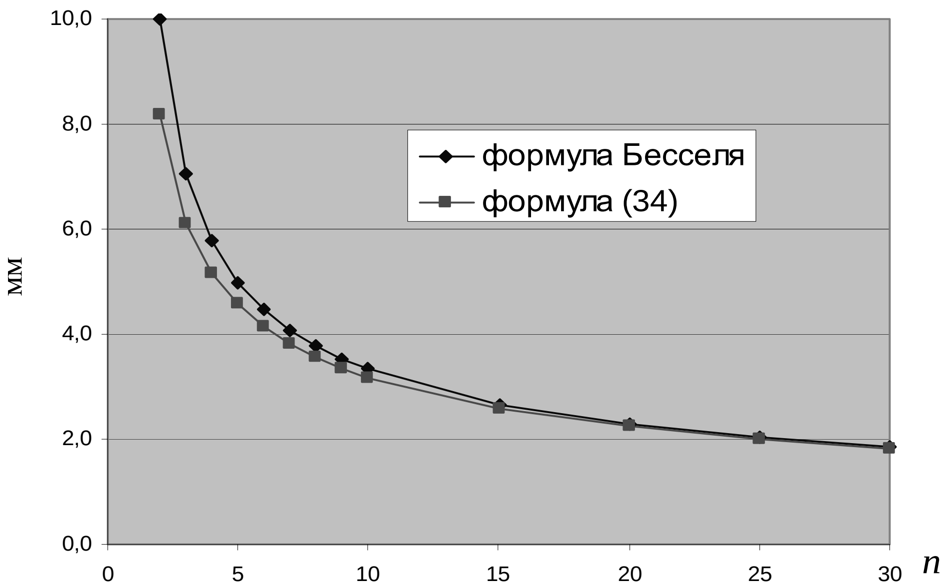

Рис. 1. Залежності середніх квадратичних похибок від кількості вимірів з урахуванням ваг вимірів і ваг поправок

Тепер спробуємо обґрунтувати цей підхід такими міркуваннями. Коли обчислюється середня квадратична похибка одного виміру за істинними рівноточними похибками, то використовується відома формула Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \,. \tag{35}$$

А коли обчислюється середня квадратична похибка одиниці ваги за нерівноточними істинними похибками, то використовується формула (31).

У цих формулах (31) і (35) ваги вимірів дорівнюють вагам похибок. А при математичній обробці результатів вимірів однієї величини ваги вимірів не дорівнюють вагам одержаних поправок і, на перший погляд, цією різницею можна знехтувати. Але це не буде точною оцінкою. Точною буде оцінка, коли ваги поправок будуть враховані, і у цьому випадку співмножники відповідатимуть один одному. Адже одне з головних призначень ваг – це те, що вони дають змогу виконувати сумісні математичні дії з нерівноточними значеннями різних величин. Хтось може заперечити, що ця різниця незначна, але завжди існує головна мета математичної обробки результатів вимірів – досягати кращих результатів.

Звичайно, у прихильників традиційного підходу є ще один важливий аргумент, а саме: середня квадратична похибка одиниці ваги і є середньою квадратичною похибкою такого виміру, вага якого дорівнює або прийнята за одиницю. Це вірно. Наведене формулювання має велике значення, але треба згадати важливу формулу обчислення середньої квадратичної похибки якоїсь функції вирівняних значень виміряних величин

$$m_U = \mu\sqrt{\frac{1}{p_U}}, \tag{36}$$

де μ – середня квадратична похибка одиниці ваги; $\frac{1}{p_U}$ – обернена вага вирівняного значення оцінюваної функції.

При цьому для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги використовують ваги вимірів, а для обчислення середньої квадратичної похибки якоїсь функції – обернену вагу вирівняного значення цієї функції. Тобто існує деяке протиріччя. У зв'язку з цим можна припустити, що для оцінки точності вирівняних величин середня квадратична похибка одиниці ваги повинна бути середньою квадратичною похибкою такого вирівняного значення виміряної величини, вага якої дорівнює або прийнята за одиницю.

Таку середню квадратичну похибку одиниці ваги можна отримати, якщо враховувати ваги поправок як при нерівноточних, так і при рівноточних вимірах. При нерівноточних вимірах однієї величини середню квадратичну похибку одиниці ваги треба обчислювати за формулою (26) для обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини і (27) для – середньої квадратичної похибки ймовірної арифметичної середини. А при рівноточних вимірах однієї величини – середню квадратичну похибку виміру за формулою (34). Викладене вище можна доповнити тим, що при оцінці точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів для визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги спочатку обчислюються ваги цих різниць. Також можна зазначити, що в [4] наведено: «… в кореляційній матриці ваги результатів вирівнювання відповідають похибці одиниці ваги μ, одержаної з вирівнювання. Похибка μ у загальному випадку не дорівнює похибці μ_0, що встановлюється до вирівнювання».

Тобто до вирівнювання існує середня квадратична похибка одиниці ваги виміряних величин, а після вирівнювання – ще середня квадратична похибка одиниці ваги вирівняних величин.

Тепер визначимось з другою властивістю ймовірної арифметичної середини. Відхилення результатів вимірів від загальної арифметичної середини обчислюється за формулою (3), а від ймовірної арифметичної середини – за формулою (8). Визначимо між ними різницю:

$$v_i - \dot{v}_i = x_i - \overline{x} - x_i + \dot{x}. \tag{37}$$

Позначимо, що

$$\dot{x} - \overline{x} = c. \tag{38}$$

З урахуванням (38) рівняння (37) можна записати так:

$$v_i = \dot{v}_i + c. \tag{39}$$

Ліву і праву частину (39) зведемо в квадрат і помножимо на корінь квадратний із ваги i-го виміру:

$$v_i v_i \sqrt{P_{x_i}} = \dot{v}_i \dot{v}_i \sqrt{P_{x_i}} + 2c\dot{v}_i \sqrt{P_{x_i}} + c^2 \sqrt{P_{x_i}}. \tag{40}$$

Підсумовуючи при $i = n$, можна записати:

$$\left[vv\sqrt{P_x}\right] = \left[\dot{v}\dot{v}\sqrt{P_x}\right] + 2c\left[\dot{v}\sqrt{P_x}\right] + c^2\left[\sqrt{P_x}\right]. \tag{41}$$

Оскільки виконується умова (14), то рівняння (41) запишеться так:

$$\left[vv\sqrt{P_x}\right]=\left[\dot{v}\dot{v}\sqrt{P_x}\right]+c^2\left[\sqrt{P_x}\right]. \tag{42}$$

Це рівняння дає можливість сказати, що:

$$\left[\dot{v}\dot{v}\sqrt{P_x}\right]<\left[vv\sqrt{P_x}\right] \tag{43}$$

або

$$\left[\dot{v}\dot{v}\sqrt{P_x}\right]=\min. \tag{44}$$

Цю другу властивість відхилень результатів вимірів від ймовірної арифметичної середини (аналогічно відомої другої властивості відхилень результатів вимірів від загальної арифметичної середини) можна сформулювати так: сума добутків кореня квадратного із ваги виміру на квадрат відхилення результату виміру від ймовірної арифметичної середини менша за суму добутків кореня квадратного із ваги виміру на квадрат відхилення результату виміру від будь-якого іншого значення, зокрема й загальної арифметичної середини.

Висновки та пропозиції. При виконанні математичної обробки результатів вимірів вчені завжди прагнули знайти (визначити) такий результат, який би був найближчим до істинного значення виміряної величини. Але на сучасному етапі розвитку науки і техніки та, можливо, і в майбутньому, істинне значення виміряної величини, ніколи не можна буде визначити, крім добре відомих випадків. З якою б точністю не вимірювались величини завжди будуть присутні випадкові похибки (систематичні похибки не розглядаються). Звичайно, ці похибки з часом зменшуватимуться, тобто наближатимуться до якогось малого значення, але не до нуля.

Тому на підставі наведеного вище можна зробити такі висновки.

1. При математичній обробці результатів нерівноточних вимірів однієї величини можна обчислювати не лише значення загальної арифметичної середини, а і ймовірної арифметичної середини.

2. Значення ймовірної арифметичної середини має такі властивості:

$$[\dot{v}\sqrt{p_x}]=0,$$

$$\left[\dot{v}\dot{v}\sqrt{P_x}\right]<\left[vv\sqrt{P_x}\right],$$

$$\left[\dot{v}\dot{v}\sqrt{P_x}\right]=\min.$$

3. При обчисленні середньої квадратичної похибки одиниці ваги використовувати ваги поправок.

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1983. – 223 с. 2. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посібник / С.П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2003. – 216 с. 3. Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезический измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с. 4. Герасимов А.П. Спутниковые геодезические сети / А.П. Герасимов. – М.: ООО «Издательство «Проспект», 2012. – 176 с. 5. Зазуляк П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навч. посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с. 6. Папазов М.Г. Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М.Г. Папазов, С.Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с. 7. Рябчій В.А. Теорія похибок вимірювань: навч. посібник / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Д.: Національний гірничий університет, 2006. – 166 с.