

П.М. Зазуляк, В.І. Нікулішин  
Національний університет "Львівська політехніка"

## МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ МАС МАСКОНІВ МІСЯЦЯ, ПОБУДОВАНІ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕПЕРЕРВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

© Зазуляк П.М., Нікулішин В.І., 2013

*Рассмотрена методика построения двухмерной модели распределения плотности с использованием непрерывного вейвлет-преобразования и проведена апробация этой методики на профилях аномалий силы тяжести, проходящих через центры главных масконов Луны.*

*It is considered the technique of constructing of two-dimensional models of the density distribution using continuous wavelet transform. It is realized an approbation of this technique on the profiles of gravity anomaly passing through the centers of major mascons of the Moon.*

**Постановка проблеми.** Серед функцій, які описують природні процеси та явища, часто зустрічаються різноманітні особливості: такі, як імпульси, сходинки, степеневі та інші особливості. Виявлення та оцінка таких особливостей дає змогу охарактеризувати певним чином те явище, що спричинило цю особливість. Особливі точки функцій, що описують гравітаційні і магнітні аномалії, тісно зв'язані з джерелами, що їх створюють і можуть містити інформацію про глибину, силу та форму об'єкта, що створює цю аномалію. Для визначення характеристик джерел, що створюють особливості в літературі [2] описано велику кількість способів, кожен з яких володіє низкою позитивних і негативних якостей. У цій роботі для знаходження таких параметрів пропонується метод неперервного вейвлет-перетворення, який вже знайшов своє застосування для аналізу потенціальних полів в роботах [5–7, 10], та володіє низкою переваг над іншими методами. До таких переваг належать локалізація аналізуючого вейвлету як в просторовій, так і в частотній областях, вибір як базового вейвлету тієї функції серед безлічі існуючих, яка найбільше підходить для аналізу цього явища, а основним є те, що таке перетворення дозволяє вилучати з вихідних даних частотну інформацію, локалізовану в просторі, що не під силу Фур'є-аналізу.

**Зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями.** У 1968 р. за даними КА Lunar Orbiter Мюллер і Сьогрен виявили великі додатні гравітаційні аномалії сили ваги на Місяці в областях з пониженою топографією, названі масконами. З того часу порядок і ступінь гравітаційного поля для Місяця зріс від 8 (Lunar Orbiter) до 165 (Lunar Prospector). Всі ці моделі було побудовано без прямих спостережень зворотного боку Місяця, на відміну від моделей [9, 4] 100-го порядку і ступеня, отриману за даними Японського КА SELENE[8], що проводив прямі спостереження зворотного боку Місяця. Завдяки цьому коефіцієнти цієї моделі до 70-го ступеня та порядку можна використовувати без апріорних обмежень. Прямі спостереження гравітаційного поля зворотного боку Місяця дозволили виявити дихотомію між масконами видимого та не видимого боку Місяця, що говорить про відмінності у внутрішній будові та тепловій еволюції між двома боками Місяця [11]. Аномалії сили ваги у районах масконів можна аналізувати як функції з особливостями, що дає змогу локалізувати та охарактеризувати ці особливі точки, а застосування прямого неперервного вейвлет-перетворення дасть нову інформацію для інтерпретації внутрішньої будови надр Місяця, його теплової еволюції та механічного стану літосфери.

**Постановка завдання.** Метою цієї роботи є розроблення методики визначення глибини залягання, густини та форми неоднорідностей, що залягають у надрах планети за їхнім гравітаційним полем з використанням одновимірною неперервного вейвлет-перетворення.

**Виклад основного матеріалу.** Одновимірне неперервне вейвлет-перетворення в інтегральній формі записується

$$W(x', h) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx, \quad (1)$$

де  $\frac{1}{h}$  – нормуючий множник,  $\psi\left(\frac{x-x'}{h}\right)$  – вейвлет функція, в якій  $x'$  відповідає за локалізацію функції по осі  $x$ , а параметр  $h$  масштабує функцію. Максимум коефіцієнтів вейвлет-перетворення  $W(x', h)$  вказує на максимальну схожість між функцією  $f(x)$  та  $\psi(x)$  у частотній області. Сама ж функція  $\psi(x)$  повинна володіти такими ознаками, як локалізація, нульове середнє, обмеженість і автомодельність [1, 3, 5]. Вейвлет-перетворення дає змогу локалізувати в просторі особливості функції (особливі точки) [1]. На рис. 1 відображені деякі функції з особливостями та їхні вейвлет спектри. Всі точкові особливості, що містяться в функціях  $f(x)$ , супроводжуються лініями локальних максимумів, які виходять з цих точок. Кількість цих ліній визначається характером особливості функції і аналізуючим вейвлетом. Приклади на рис. 1, а, б показали, що зміна знаку першої похідної функції  $f(x)$ , супроводжуються трьома лініями локальних екстремумів на вейвлет-спектрі. Центральна лінія є лінією максимуму або мінімуму залежно від того, чи має функція в цій точці максимум або мінімум. Такі особливості (рис. 1, в) у яких друга похідна функції  $f(x)$  змінює знак (точки перегину) супроводжуються двома лініями локальних екстремумів.

Отже, вейвлет-перетворення здатне виявити положення особливостей функції. Значення коефіцієнтів вейвлет-перетворення гладкої функції малі і різко зростають, коли з'являється якась особливість, відмічаючи її локалізацію лініями локальних екстремумів.

Результати, наведені на рис. 1, отримані за допомогою МНАТ-вейвлету (перша похідна від функції Гаусса)

$$\psi(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2)$$

що має два нульові моменти (нульовий і перший). Вейвлети, що мають лише один нульовий момент, не розпізнають особливості похідних. Розподіл коефіцієнтів вейвлет-перетворення, отриманого за допомогою такого вейвлету, має менше ліній локальних екстремумів. Наприклад, для функцій, зображених на рис. 1, а, б відсутні центральні лінії екстремумів, а особливість функції з перегином (рис. 1, в) не відображається взагалі. Із зростанням кількості нульових моментів зростає кількість особливостей, які відображає вейвлет [1].

Як бачимо з рис. 1, за допомогою вейвлет-спектра ми можемо визначити положення особливості функції вздовж горизонтальної осі. На практиці при аналізі потенціальних полів виникає потреба визначити не лише локалізацію особливості вздовж горизонтальної осі, але й глибину залягання джерела, що створює особливість функції.

Як потенціальне поле розглянемо вертикальну складову сили ваги. Тоді особливості, що спостерігатимуться у значеннях сили ваги, створюватимуться неоднорідностями, що залягають в надрах планети і характеризуються такими параметрами, як глибина залягання, аномальна густина (густина, яка відмінна від середнього значення), та форма неоднорідності. Проаналізуємо можливість визначення цих параметрів з використанням одновимірною неперервного вейвлет-перетворення.

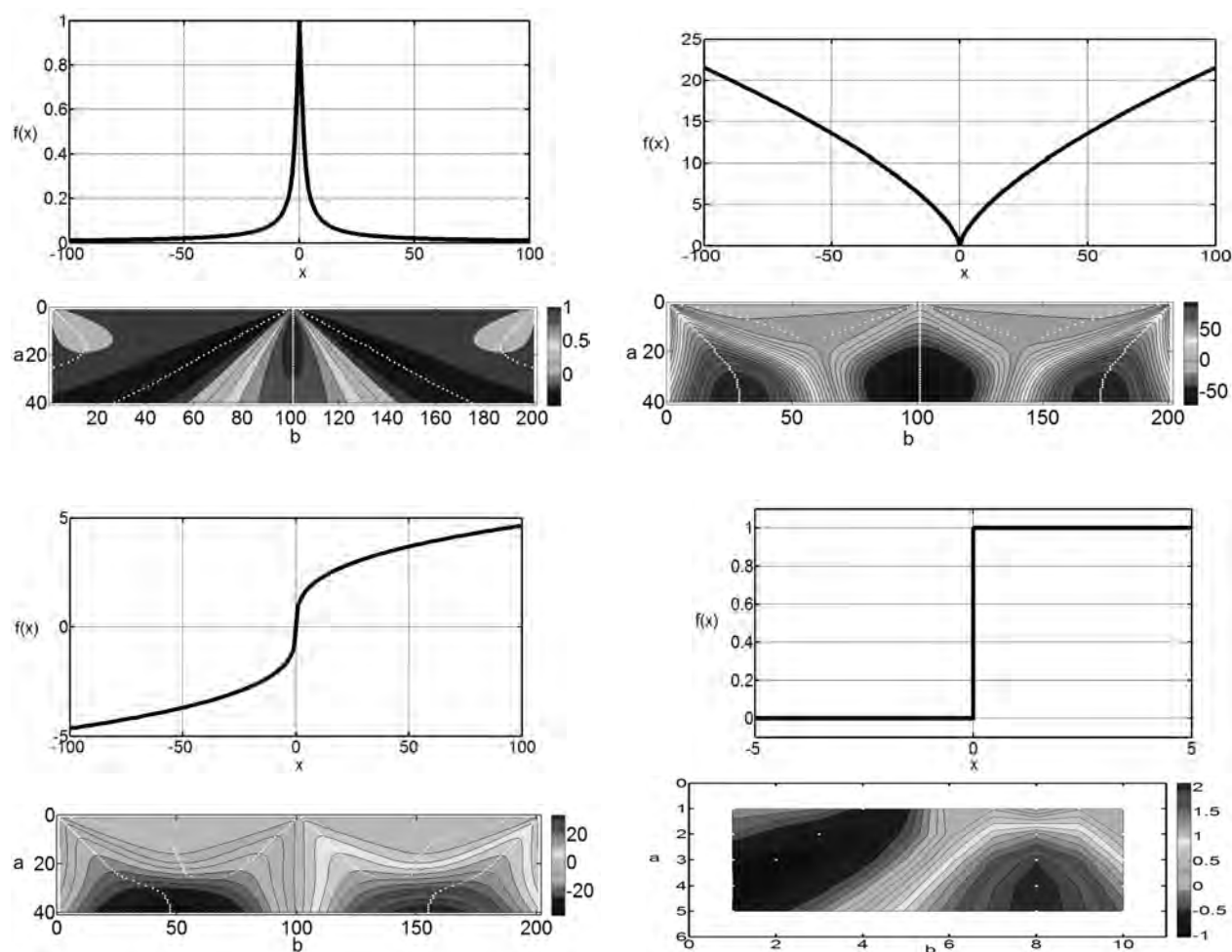


Рис. 1. Вейвлет-перетворення функцій з особливостями:

$$a - f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad b - f(x) = x^2; \quad c - f(x) = x^3; \quad d - f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

**Визначення глибини залягання та густини неоднорідності, що створює збурення у гравітаційному полі.** Якщо представити неоднорідність у вигляді двовимірної точкової маси, то вертикальна складова сили ваги  $\Delta g$  визначатиметься як

$$\Delta g(x) = G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h \cdot \rho(x', h)}{\sqrt{((x - x')^2 + h^2)^3}} dx' dh, \quad (3)$$

де  $G$  – гравітаційна стала;  $h$  – глибина залягання неоднорідності;  $x'$  – координата залягання неоднорідності.

Відносна частота функції  $\Delta g$  напряму залежить від глибини залягання неоднорідності. Як було сказано вище, максимум вейвлет-коефіцієнтів вказує на максимальну схожість між вейвлетом та функцією, яку ми аналізуємо у частотній області. За зміну відносної частоти вейвлету при вейвлет-перетворенні у формулі 1 відповідає масштабний коефіцієнт  $h$ , який є величиною, обернено пропорційною до частоти вейвлету. Термін “відносна частота” вживається тут тому, що вейвлет не є гармонічною функцією і не має такої характеристики, як частота у звичному значенні. Проте визначити відносну частоту центрального сплеску вейвлету можливо, порівнявши його з будь-якою гармонічною функцією (синусом або косинусом). Частота, за якої гармонічна функція найбільше

збігається з центральним сплеском вейвлету, і буде називатись відносною частотою вейвлету. Визначити відносну частоту можна за формулою

$$\nu = \frac{\nu_0}{h}, \quad (4)$$

де  $\nu_0$  максимум функції взаємної кореляції  $\rho(\nu)$  при  $h = 1$  (рис. 2)

$$\rho(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,1) \cdot \cos(2\pi\nu x) dx. \quad (5)$$

Отже, для того, щоб максимум вейвлет-спектра для функції  $\Delta g$  збігався з глибиною залягання неоднорідності, потрібно підібрати такий вейвлет, щоб із зміною  $h$  відносна частота вейвлету та функції  $\Delta g$ , були однакові. Для двовимірної точкової маси, що знаходиться на глибині 1 км, частота  $\nu$  дорівнює 0,23 Гц. Серед класичних вейвлетів такою ж частотною характеристикою володіє МНАТ вейвлет (рис. 2). Цей факт дає змогу використовувати його для визначення глибини залягання неоднорідностей у вигляді двовимірних точкових мас.

Розглянемо функцію  $\Delta g$ , утворену трьома точковими джерелами з аномальною двовимірною густиною 10 кг/км<sup>2</sup>, що залягають на глибині 2, 5, 10 км (рис. 3 верхній). Виконаємо вейвлет-перетворення цієї функції за формулою 3, використовуючи як базовий МНАТ вейвлет (рис. 3 нижній).

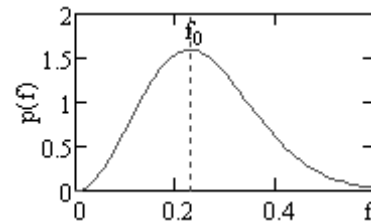


Рис. 2. Визначення  $\nu_0$  за максимумом функції взаємної кореляції для вейвлету МНАТ

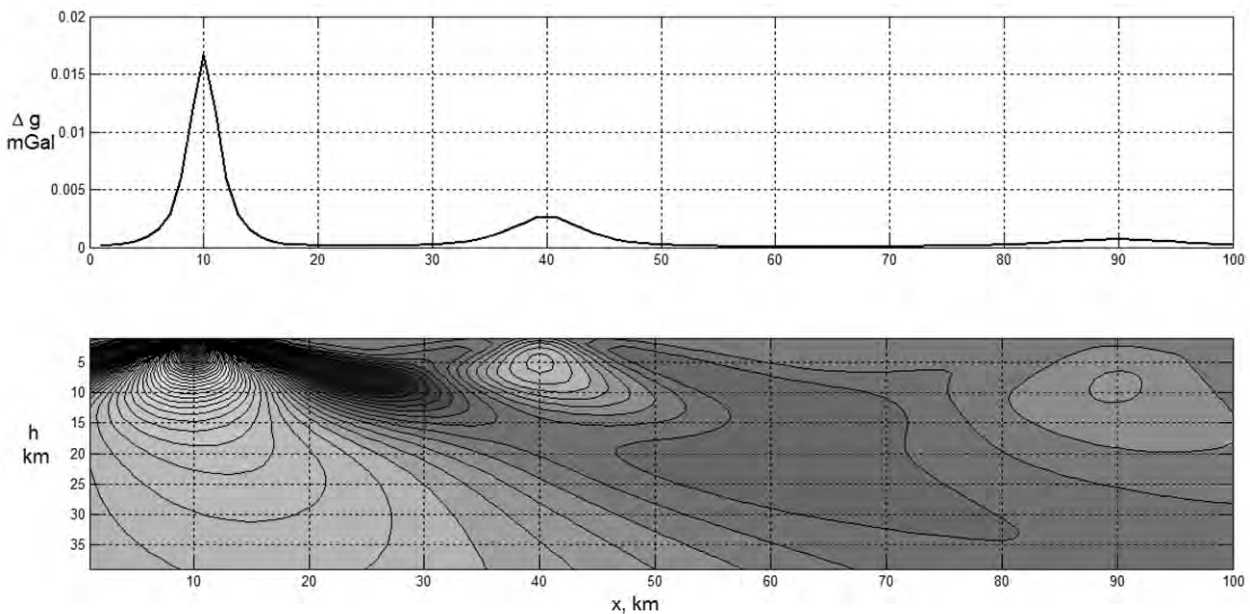


Рис. 3. Функцію сили ваги утворено трьома точковими масами з однаковою густиною, що залягають на глибині 2, 5, 10 км (верхній рисунок) та вейвлет-спектр цієї функції, побудований за допомогою МНАТ вейвлет (нижній рисунок)

Як бачимо з рис. 3, максимуми вейвлет-спектра з точністю до кілометра збігаються з глибиною залягання точкових мас. Однак, якщо точкові маси знаходяться близько одна від однієї вздовж осі  $x$ , то на вейвлет-спектрі спостерігається лише 1 максимум, який відповідає точковій масі, що залягає на найменшій глибині. Визначити ж глибину залягання інших точкових мас можна, вилучивши зі значень функції  $\Delta g$  вплив першої точки та повторно провівши вейвлет-перетворення.

Хоча значення вейвлет-коефіцієнтів дають інформацію про розподіл густини з глибиною, проте вони є далекими від реальних величин. Для визначення значень густини у реальних одиницях запишемо густину

$$\rho(x', h) = X(x') \cdot W(x', h) \quad (6)$$

та перепишемо рівняння 3 у вигляді

$$\Delta g(x) = G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h \cdot X(x') \cdot W(x', h)}{\sqrt{\left((x-x')^2 + h^2\right)^3}} dx' dh, \quad (7)$$

де  $W(x', h)$  коефіцієнти вейвлет-перетворення, а  $X(x')$  – множник, який приводить значення вейвлет коефіцієнтів до густини. У дискретному випадку, де значення коефіцієнтів  $W(x', h)$  задані на одиничній сітці, рівняння (7) запишемо так

$$\Delta g(x) = G \sum_{x'=1}^{N_1} \sum_{h=1}^{N_2} \frac{h \cdot W(x', h)}{\sqrt{\left((x-x')^2 + h^2\right)^3}} \cdot X(x'). \quad (8)$$

Введемо позначення

$$A(x, x', h) = \frac{h \cdot W(x', h)}{\sqrt{\left((x-x')^2 + h^2\right)^3}} \quad (9)$$

та перепишемо вираз 8 у матричному вигляді

$$A \cdot X = \Delta g. \quad (10)$$

Розв'язавши таке матричне рівняння відносно  $X$  та підставивши отримані значення в 6, знайдемо значення густини.

**Розподіл густини для профілів аномалій сили ваги, що проходять через центри головних масконів Місяця.** Розглянемо аномальну частину радіальної складової сили ваги для видимої і невидимої сторін Місяця, обчислену за моделлю гравітаційного поля, яку отримано в роботі [4] за спостереженнями Японського КА SELENE[8](рис.4). Із рисунка видно, що маскони видимої та невидимої боків Місяця кардинально відрізняються. Маскони видимої боку (на рисунку позначені цифрами 1–6) характеризуються додатними гравітаційними аномаліями та мають форму, близьку до круга, в середині якого значення аномалій сили ваги є постійною величиною. Маскони ж зворотного боку Місяця характеризуються двома концентричними кільцями додатних та від'ємних аномалій сили ваги. У центрі цих кілець міститься пік, створений додатними значеннями сили ваги. Така відмінність між масконами видимої та невидимої боків Місяця свідчить про неоднакову будову кори та верхньої мантії на видимій та зворотній стороні.

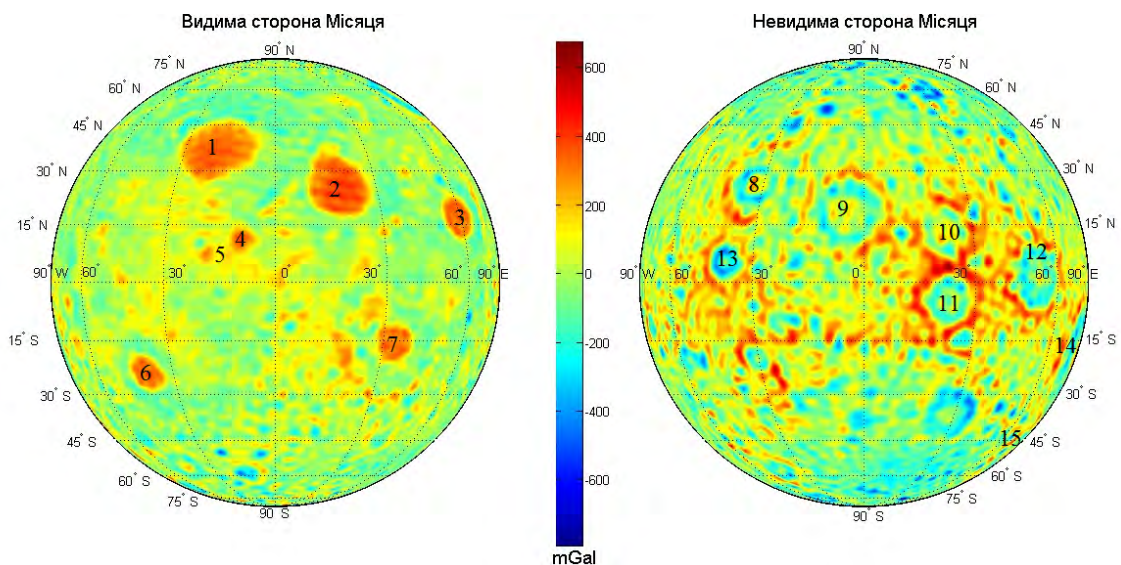


Рис. 4. Аномальна частина радіальної складової сили ваги Місяця, зображена в екваторіальній азимутальній проекції. Цифрами позначено маскони: 1 – Imbirum; 2 – Serenitatis; 3 – Crisium; 4 – Eratosthenes; 5 – Copernicus; 6 – Humor; 7 – Nectaris; 8 – Moscoviense; 9 – Freundlich-Sharanov; 10 – Dirichlet-Jackson; 11 – Korolev; 12 – Hertzprung; 13 – Mendeleev; 14 – Orientale; 15 – Mendel-Rydberg

Для локалізації розподілу аномальних мас у надрах Місяця виконаємо неперервне вейвлет-перетворення вздовж профілів, які проходять через центри масконів, зображених на рис. 4 зі сходу на захід та з півдня на північ. Результати наведено на рис. 5–9.

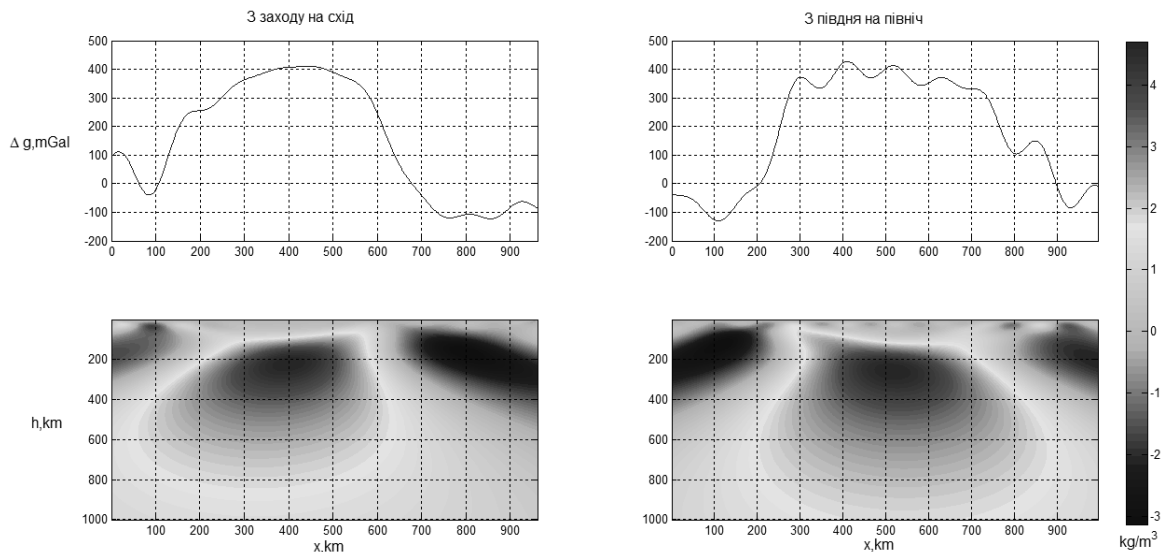


Рис. 5. Вейвлет-спектр аномалій сили ваги побудовані вздовж профілів, проведені через центр маскону Imbirum

Всі вейвлет-спектри масконів видимого боку Місяця є однотипними і відрізняються лише глибиною залягання. Розглянемо рис. 5, на якому представлено розподіл аномальної густини для маскону Imbirum. Максимум густини для цього маскону спостерігається на глибині 210 км (профіль захід–схід) та 250 км (профіль південь–північ), що свідчить про несиметричність розподілу густини в різних напрямках. Що стосується від’ємних значень густини, то їхні мінімуми залягають на глибині від 180 до 200 км. Максимум аномальної густини припадає на верхню мантію (60–400 км) та зменшується у разі заглиблення в нижню мантію, яка сягає 1100 км. Глибини максимумів густини для інших масконів видимої сторони наведемо в таблиці.

**Глибини залягання максимумів та мінімумів густини для масконів видимого боку Місяця**

Назва	Глибина максимуму густини, км		Глибина мінімуму густини, км		Аномальна густина, $\frac{кг}{м^3}$	
	Захід–схід	Південь–північ	Захід–схід	Південь–північ	Максимальна	Мінімальна
Serenitatis	220	250	150	200	4,9	-3,1
Crisium	195	180	120	105	4,1	-2,3
Eratosthenes	115	115	60-115	60-100	3,5	-2,1
Copernicus	140	95	30-85	22-80	2,5	-1,0
Humorum	145	135	95	100	4,8	-3,2
Nectaris	155	155	100	90	3,7	-2,2

Маскони зворотного боку за отриманими розподілами можна поділити на два типи. До першого типу належать маскони Orientale, Mendel-Rydberg, Moscoviense, Freundlich-Sharanov, Hertzsprung. Отримані розподіли таких масконів характерні тим, що максимуми та мінімуми густини знаходяться на однакових глибинах (від 45 до 125 км) із значеннями густин від -5 до  $5 \frac{кг}{м^3}$ . На рисунку зображено розподіл аномальних густин для профілів, що проходять через центр

маскону Orientale. Для маскону Freundlich-Sharanov(рис.7) крім аномального розподілу густини на глибині до 200 км значення густини має ще один максимум на глибині 300 (профіль захід–схід) та 500 (профіль південь–північ) км.

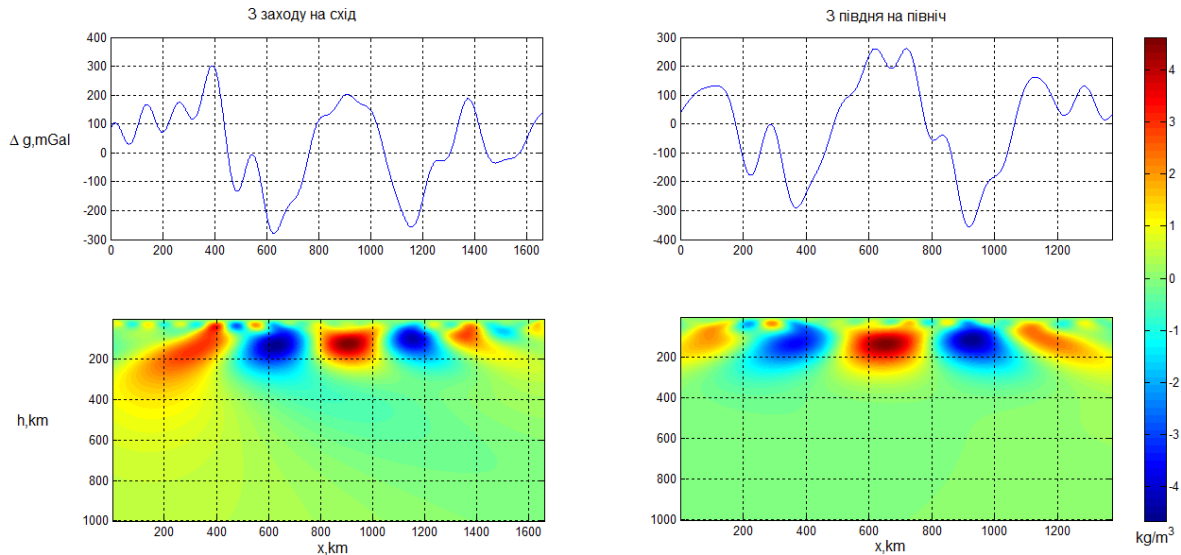


Рис. 6. Вейвлет-спектр аномалій сили ваги побудовані вздовж профілів, проведені через центр маскону Orientale

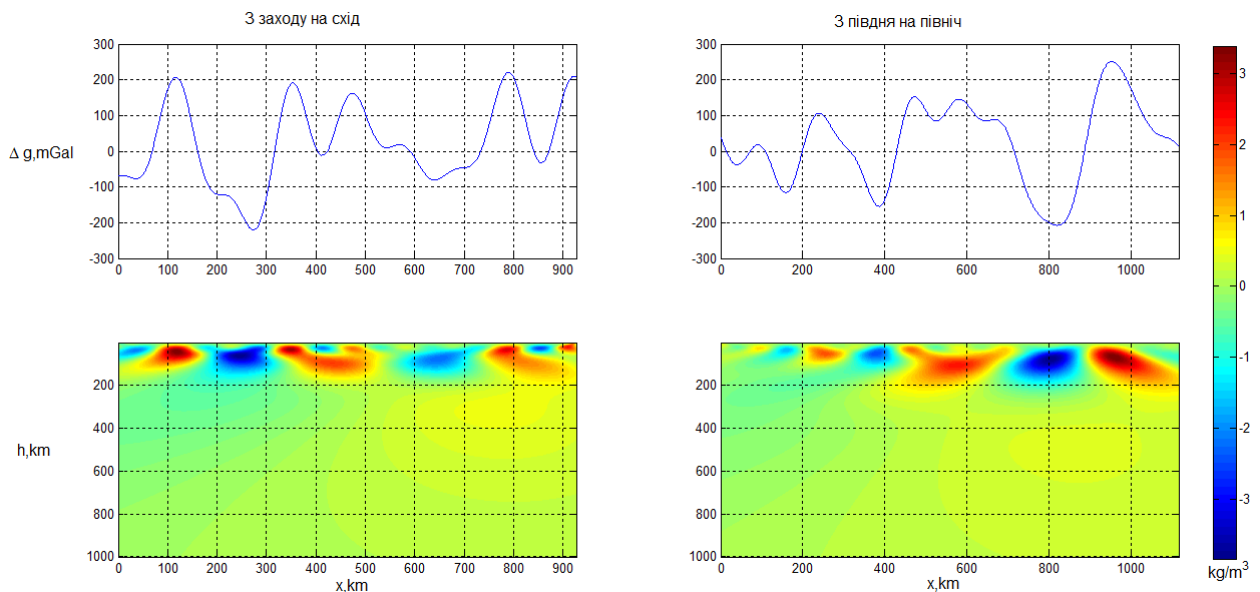


Рис. 7. Вейвлет-спектр аномалій сили ваги побудовані вздовж профілів, проведені через центр маскону Freundlich-Sharanov

Другий тип масконів(Dirichlet-Jackson, Mendeleev, Korolev) характеризується тим, що з глибиною величини аномальних густин періодично змінюють знак (рис. 8, 9), що свідчить про те, що механізми утворення таких масконів були іншими, ніж для масконів першого типу.

Порівнюючи маскони видимого і невидимого боків Місяця, можна сказати про те, що основні джерела аномалій сили ваги на видимому боці Місяця знаходяться в верхній та нижній мантії. Неоднорідності густини зворотного боку Місяця залягають на глибинах, що належать до границі кори і верхньої мантії. Результат розподілу густини, отриманий для масконів видимого боку

Місяця, не можна вважати задовільним, оскільки він не відображає базальтових відкладень[11], що знаходяться на поверхні басейнів Місяця.

Хоча отриманий результат є формальним розв'язком оберненої задачі гравіметрії і має ряд недоліків, пов'язаних з апіорним вибором форми джерела, проте такий розподіл можна використовувати для інтерпретації разом із геологічними або геофізичними даними.

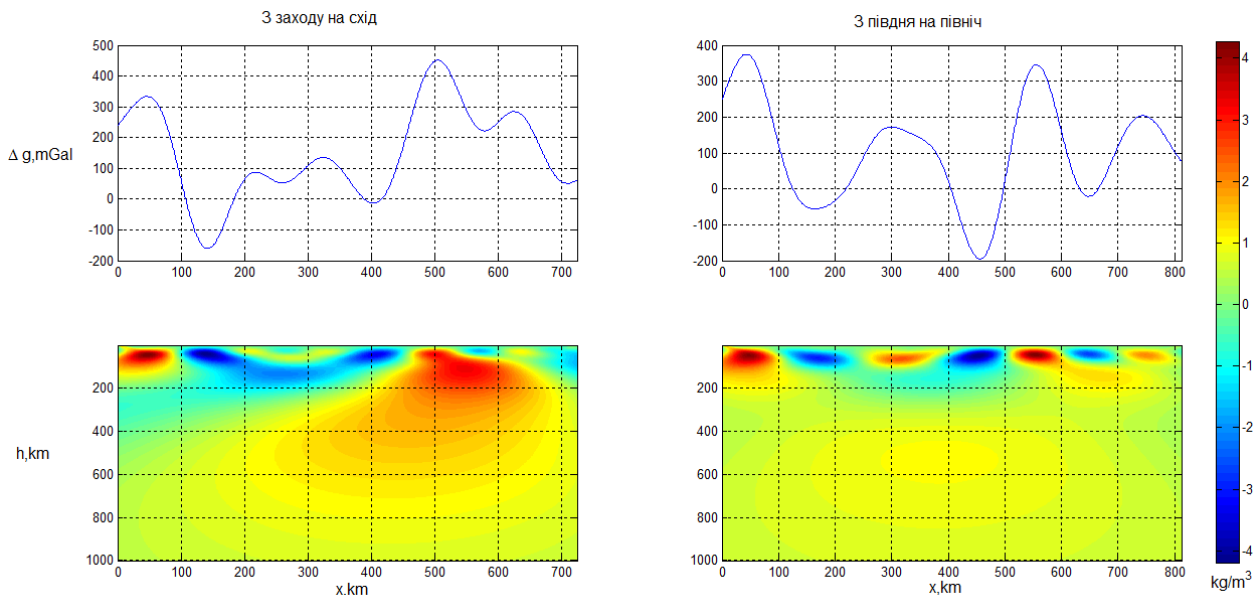


Рис.8. Вейвлет-спектр аномалій сили ваги побудовані вздовж профілів, проведені через центр маскону Dirichlet-Jackson

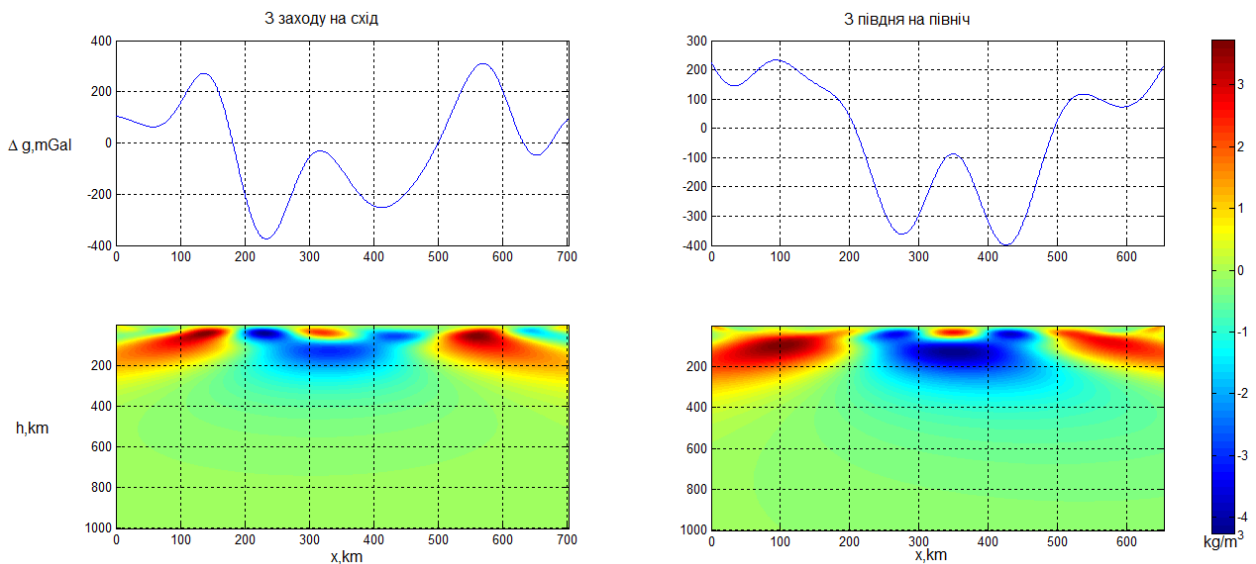


Рис. 9. Вейвлет-спектр аномалій сили ваги побудовані вздовж профілів, проведені через центр маскону Mendeleev

**Висновки.** Розглянуто теоретичні аспекти вейвлет-перетворень та їх основні властивості. На прикладі модельних даних апробовано методику локалізації положення аномальних точкових мас з використанням одновимірного вейвлет-перетворення. На основі одновимірного неперервного вейвлет-перетворення розроблено методику розв'язання оберненої задачі гравіметрії у двовимірному просторі. За запропонованою методикою побудовано розподіли густин вздовж профілів, які



проходили через центри масконів видимого та невидимого боків Місяця. Дано інтерпретацію отриманих результатів та порівняльну характеристику розподілу аномальних густин видимого та невидимого боків Місяця.

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. Астафьева // *Успехи физических наук.* – Т.166. – № 11. – 1996. – С. 1145–1170. [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: [http://www.isuct.ru/~artcol/articles/Uspekhi\\_Fiz\\_Nauk/wavelet-analys.pdf](http://www.isuct.ru/~artcol/articles/Uspekhi_Fiz_Nauk/wavelet-analys.pdf).
2. Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий / Ю. Блох // *Московская Государственная Геологоразведочная Академия, Москва.* – 1998. – 88 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: <http://www.geokniga.org/books/77>.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М., 2001. – 461 с.
4. Зазуляк П.М., Нікулішин В.І. Модель гравітаційного поля Місяця, одержана за аномаліями у вільному повітрі / Зазуляк П. // *Міжвідомчий науково-технічний збірник “Геодезія, картографія і аерофотознімання”.* – Львів, 2012. – Вип 75. – С.3–7.
5. Нікулішин В.І. Практика застосування вейвлет аналізу до гравітаційного поля Місяця / В.І. Нікулішин // *Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”.* – Львів, 2012. – Вип II(24). – С.65–68.
6. Утёмов Э.В., Нурғалиев Д.К., Хамидуллина Г.С. Технология обработки и интерпретации гравиметрических данных на основе “естественного” вейвлет-преобразования / Э. Утёмов, Д. Нурғалиев, Г. Хамидуллина // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки.* – Т. 1, Кн. 3. – 2010. – С.208–222 [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: <http://elibrary.ru/item.asp?id=15519850>.
7. Cooper G.R.J. Interpreting potential field data using continuous wavelet transforms of their horizontal derivatives/G. Cooper // *Computers & Geosciences.– University of the Witwatersrand, Johannesburg.*–№32.–2006.–P.984–992 [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела: [https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2008/1/GF700/1/material\\_docente/bajar?id\\_material=174805](https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2008/1/GF700/1/material_docente/bajar?id_material=174805).
8. Japan Aerospace Exploration Agency. Kaguya(SELENE). [http://www.SELENE.jaxa.jp/en/science/RSAT/G\\_Anom\\_Map\\_4\\_public\\_e.htm](http://www.SELENE.jaxa.jp/en/science/RSAT/G_Anom_Map_4_public_e.htm).
9. Lunar gravity field determination using SELENE same-beam differential VLBI tracking data: SpringerLink [Электронный ресурс] / S. Goossens K. Matsumoto, Q. Liu, F. Kikuchi, K. Sato, H. Hanada, Y. Ishihara, H.Noda, N. Kawano, N. Namiki, T. Iwata, F. G. Lemoine, D.D. Rowlands, Y. Harada, M. Chen // *Journal of Geodesy.* – 2010. – №4. – P.205–208. – Режим доступа до журн.: <http://www.springerlink.com/content/n2p6437361xh4244/>.
10. Moreau F., Gibert D., Holschneider M., Saracco G. Indetification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform:Basic theory / F. Moreau, D. Gibert, M. Holschneider, G. Saracco // *J. Geophys.* – V.104. – № B3. – 1999. – P.5003–5013 [Электронный ресурс] – Режим доступа до джерела:[ftp://ftpobs.univ-bpclermont.fr/GEOL/volcano/Augier/biblio/ondelettes/moreau\\_jgr1999.pdf](ftp://ftpobs.univ-bpclermont.fr/GEOL/volcano/Augier/biblio/ondelettes/moreau_jgr1999.pdf)
11. Wieczorek M. A., Jolliff B. L., Khan A. et al. The constitution and structure of the lunar interior // *New Views of the Moon Rev. Mineral. Geochem,* 2006. – V. 60. – P. 221–364.