

О.А. Тадєєв

Національний університет водного господарства та природокористування

## ОЦІНЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ З ПОЗИЦІЙ ТЕОРІЇ КВАЗИКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

© Тадєєв О.А., 2013

*Решена задача оценки горизонтальных деформаций по геодезическим данным на основе теории квазиконформных отображений поверхностей.*

*The solving of the problem of horizontal deformation assessment by geodetic data based on the theory of quasiconformable reflections of surface has been disclosed.*

### **Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями.**

Оцінювання деформованого стану земної поверхні за геодезичними даними є складовою частиною комплексних геодинамічних та геолого-геофізичних досліджень земної кори, спрямованих на встановлення параметрів її напружено-деформованого стану. Подібні дослідження проводяться в межах численних наукових та галузевих програм і мають на меті описування стану та прогнозування показників перетворення природного середовища. Результати досліджень застосовуються при розв'язанні різних наукових та інженерних задач, а також дають змогу вирішити низку прикладних завдань з охорони навколишнього середовища та встановлення рівня безпеки життєдіяльності.

**Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми.** Сьогодні вирішують проблему на основі лінійної теорії деформації, яку запозичено з механіки суцільного середовища [3]. Технічним апаратом її реалізації є метод скінченних елементів [2]. Практично всі рішення обмежені рамками симплексної лінійної моделі і зводяться до вираження відповідних їй компонент тензора деформації. Винятком є дослідження [1], де до визначення тих самих компонент залучено апарат білінійних функцій з їх апроксимацією на скінченних елементах у формі чотирикутника і комбінації локальних сплайн-функцій.

Не піддаючи жодному сумніву ефективність методу скінченних елементів, потрібно, однак, констатувати, що недотримання вимог його практичного втілення спричинює результати опрацювання сумнівної достовірності. Адже в класичній постановці метод призначений виключно для описування параметрів лінійної деформації. Тому його застосування без попередньої перевірки відповідності умовам лінійної моделі неприпустиме. Навіть за належного обґрунтування цих умов для окремих ділянок земної поверхні, щодо інших ділянок неможливе неупереджене оцінювання їх деформованого стану. Ця обставина значно звужує коло застосування методу скінченних елементів. Тим самим посвідчується необхідність його вдосконалення, узагальнення на випадок оцінювання нелінійних деформацій або вироблення альтернативних підходів до вирішення поставленої проблеми. У роботі [7] здійснено спробу альтернативного підходу до оцінювання горизонтальних деформацій за геодезичними даними, в основу якого покладено теорію відображення поверхонь, але розкрито рішення за тієї ж умови лінійного закону деформації. Інші підходи та рішення щодо оцінювання деформацій у межах окресленої проблеми відсутні.

**Постановка завдання.** Завдання оцінювання деформацій земної поверхні за геодезичними даними можна сформулювати по-різному залежно від змісту та структури вихідних даних, його сутності і перспектив застосування результатів до інтерпретації геодинамічних процесів. За будь-

яких формулювань постає невирішеним завдання вираження параметрів деформованого стану поверхні, який відповідає нелінійній моделі. Розглянемо постановку проблеми в загальному вигляді – не враховуючи до походження і характер деформації земної поверхні. З цією метою окреслимо її з погляду проективно-диференціальної геометрії [8]. Для вирішення завдання оцінювання деформацій використаємо теорію поверхонь [6] та деякі рішення щодо врахування спотворень при їх відображенні, які застосовуються в математичній картографії [5].

**Виклад основного матеріалу досліджень.** Основи загальної теорії відображення поверхонь розглядаються у довільній криволінійній системі координат. Однак застосування теорії до розв'язання різного роду прикладних задач змушує конкретизувати координатні системи на взаємно відображуваних поверхнях і з метою досягнення найкращої відповідності змісту досліджуваних проблем або здобуття простих рішень встановлювати відповідну їх параметризацію. Найпростішою є ріманова (евклідова) параметризація, за якої поверхні мають нульову кривину, а їхня внутрішня геометрія описується елементарними співвідношеннями. У теорії поверхонь практичне застосування ріманової системи обмежене, оскільки її вважають виключно локальною і при відображенні скінченних областей поверхонь доводиться перераховувати їхні координати при переході від однієї точки поверхні до іншої, що ускладнює розрахунки. Ця вада не заважає використовувати систему для вирішення поставленого у роботі завдання, якщо взяти до уваги, що координати геодезичних пунктів виражені або їх можна легко перетворити на прямокутну систему проекції Гаусса–Крюгера на площину і врахувати добре відлагоджений механізм перерахунку координат з однієї зони проекції в іншу з урахуванням її спотворень. Така аргументація виправдовує застосування ріманової параметризації поверхонь для оцінювання деформацій земної поверхні локального і регіонального масштабів.

Отже, встановимо на площині  $S$  прямокутну систему координат  $x, y$  і виділимо на ній замкнену неперервну область  $\Delta \subset S$ . Нехай  $n$  точок  $M_i(x_i, y_i) \in \Delta$  ( $i = \overline{1, n}$ ) цілком визначають область  $\Delta$ . Її лінійні елементи  $ds$  описує просте співвідношення:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (1)$$

Припустимо, внаслідок деформації порушилось взаємне положення точок  $M_i$ , площина  $S$  трансформувалась у площину  $S'$  з прямокутними координатами  $x', y'$  і область  $\Delta$  відобразилась на область  $\Delta' \subset S'$ . При цьому  $\Delta'$  зберегла властивості замкненої та неперервної області і її визначають ті самі точки  $M_i$ , але  $M_i(x'_i, y'_i) \in \Delta'$ . Нехай відображення точок  $M_i(x_i, y_i) \in \Delta$  на точки  $M_i(x'_i, y'_i) \in \Delta'$  описують функції

$$\left. \begin{aligned} x' &= u(x, y) \\ y' &= v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Співвідношення між точками  $M \in \Delta$  площини  $S$  і точками  $M \in \Delta'$  площини  $S'$ , яке виражають функції (2), називається відображенням (або проекцією) області  $\Delta \subset S$  на область  $\Delta' \subset S'$ . Враховуючи, що плоскі області  $\Delta$  і  $\Delta'$  є конформними проекціями відповідних їм областей земної поверхні до та після деформації, відображення  $\Delta \subset S$  на  $\Delta' \subset S'$ , задане функціями (2), можна розглядати за теорією квазіконформних відображень [5]. За вимогами теорії, функції (2) повинні бути однозначними і неперервними разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядку, а також задовольняти умову  $\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0$ . Ці вимоги виражають

властивість гомеоморфізму відображення, яке реалізується такими функціями: відображення є взаємно однозначним і взаємно неперервним. Така властивість дає змогу задавати взаємно відображувані площини їх першими метричними формами і описувати функціями (2) не лише власне проекцію, а й внутрішню геометрію відображуваних областей, яка зумовлена зміною їх метричних властивостей внаслідок деформації. Схему відображення показано на рисунку.

Метричну форму на площині  $S$  подано рівнянням (1), а напрям її лінійного елемента  $ds$  визначає дирекційний кут

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}. \quad (3)$$

Метричну форму на площині  $S'$  подано рівнянням

$$d\sigma^2 = dx'^2 + dy'^2. \quad (4)$$

Припустімо, для функцій (2) встановлено аналітичну форму, яка зображає перехід від області  $\Delta \subset S$  до області  $\Delta' \subset S'$ . Тоді, враховуючи повні диференціали

$$dx' = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad dy' = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \quad (5)$$

з урахуванням відображення, яке реалізують функції, для лінійного елемента  $d\sigma$  одержимо:

$$d\sigma^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy^2 \quad (6)$$

або

$$d\sigma^2 = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2; \quad (7)$$

$$e = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2; \quad f = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}; \quad g = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \quad (8)$$

Складові (8) формують симетричну матрицю коефіцієнтів першої квадратичної форми (7).

Співвідношення лінійних елементів  $d\sigma$  і  $ds$  на відображуваних поверхнях виражає масштаб  $\mu = \frac{d\sigma}{ds}$  проєкції (2) у напрямі (3) на площині  $S$ :

$$\mu^2 = e \cos^2 \alpha + f \sin 2\alpha + g \sin^2 \alpha. \quad (9)$$

Величина масштабу  $\mu$  характеризує спотворення відображення (2) у напрямі  $\alpha$  і називається коефіцієнтом спотворення (або модулем розширення). Формула (9) дає змогу виразити головні (екстремальні) масштаби  $\mu_{ext}$  і відповідні їм головні напрями, вздовж яких  $\mu = \mu_{ext}$ . Головні

напрями визначає розв'язок рівняння  $\frac{d(\mu^2)}{d\alpha} = 0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2f}{e-g}. \quad (10)$$

Розв'язок (10) задає на площині  $S$  два головні ортогональні напрями  $\alpha_0$  і  $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ , яким відповідають екстремальні масштаби  $\mu_{\max} = a$  і  $\mu_{\min} = b$ :

$$a^2 = \frac{1}{2} \left( e + g + \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2} \right); \quad b^2 = \frac{1}{2} \left( e + g - \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2} \right). \quad (11)$$

Величини масштабів  $a$  і  $b$  своїми числовими значеннями виражають екстремальні масштаби вздовж відповідних головних напрямів і називаються коефіцієнтами максимального і мінімального спотворення (або розширення). Виконуючи прості перетворення рівнянь (10) і (11) за величинами  $a$ ,  $b$  і  $\alpha_0$ , можна виразити масштаб відображення  $\mu$  у довільному напрямі  $\alpha$ :

$$\mu^2 = a^2 \cos^2(\alpha - \alpha_0) + b^2 \sin^2(\alpha - \alpha_0). \quad (12)$$

Якщо задати  $\alpha = 0$  і  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , з формули (9) одержимо масштаби відповідно  $\mu = m$  у напрямі координатної осі  $x$  (за умови  $y = \operatorname{const}$ ) і  $\mu = n$  у напрямі осі  $y$  (при  $x = \operatorname{const}$ ):

$$m = \sqrt{e}; \quad n = \sqrt{g}. \quad (13)$$

Масштаб площі виражає співвідношення  $p = \frac{dS'}{dS}$ .  $dS = dx dy$  і  $dS' = dx' dy'$  – елементи площі на  $S$  і  $S'$ . Масштаб  $p$  – коефіцієнт відносної зміни площ областей  $\Delta \subset S$  і  $\Delta' \subset S'$  внаслідок відображення відповідних площин. Якщо виразити  $dS'$  у координатній системі площини  $S$ , то, з урахуванням (7),  $dS' = \sqrt{eg - f^2} dx dy$ . Величину  $eg - f^2 = h^2$  називають дискримінантом першої квадратичної форми (7). Тоді

$$p = \sqrt{eg - f^2} \tag{14}$$

або, беручи до уваги попередні рівняння,

$$p = ab. \tag{15}$$

Допустимо, внаслідок деформації координатна вісь  $x$  площини  $S$  відобразилась на площині  $S'$  проекцією, напрям якої визначає дирекційний кут  $\psi$ . Аналогічно напрям відображення на площині  $S'$  осі  $y$  визначає дирекційний кут  $\chi$ . Напрями проекцій координатних осей  $x, y$  на площині  $S'$  виражають співвідношення

$$\operatorname{tg} \psi = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad \operatorname{tg} \chi = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right). \tag{16}$$

Вони дають змогу виразити різницю  $\vartheta = \chi - \psi$  дирекційних кутів зображень на площині  $S'$  координатних осей площини  $S$  і спотворення їх ортогональності  $\varepsilon = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{h}{f}; \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{f}{h}. \tag{18}$$

Своєю величиною кут  $\varepsilon$  характеризує обертання системи точок  $M_i(x'_i, y'_i) \in \Delta'$  площини  $S'$  відносно координатної системи  $x, y$  площини  $S$ . Враховуючи величини  $\vartheta, m$  та  $n$ , за ними можна виразити масштаб відображення  $\mu$  у напрямі  $\alpha$

$$\mu^2 = m^2 \cos^2 \alpha + mn \cos \vartheta \sin 2\alpha + n^2 \sin^2 \alpha, \tag{19}$$

а також масштаб площі

$$p = mn \sin \vartheta. \tag{20}$$

Формули (9)–(20) дають змогу за рівняннями проекції (2) одержати різні величини, які характеризують властивості відображення замкненої області площини  $S$  на площину  $S'$ . Схему і напрями відображення показано на рисунку. Важливо зазначити, що ці величини описують відповідні їм властивості гомеоморфного відображення безвідносно до аналітичної форми функцій (2). Це розкриває нові перспективи вирішення поставленої проблеми і, крім того, забезпечує рішення, яке враховує ефект деформування координатних систем. Характеристики спотворення початкової площини внаслідок її деформації можуть виражатись у системах координат обох відображуваних площин. У цьому сенсі вони інваріантні щодо вибору системи координат.

У роботі [7] вирішено проблему за умови реалізації відображення функціями лінійного вигляду. Доведено, що величини, які характеризують властивості відображення, тотожні відповідним за змістом параметрам, які виражаються методом скінченних елементів у межах класичної теорії лінійної деформації суцільного середовища. Але точність формул теорії відображення вища порівняно з відповідними аналогами теорії лінійної деформації. Враховуючи тотожність результатів рішень з позицій обох теорій, констатуємо їх взаємозв'язок. Сумісне використання обох підходів забезпечує інтерпретацію результатів опрацювання геодезичних даних як з геометричного, так і з фізичного погляду.

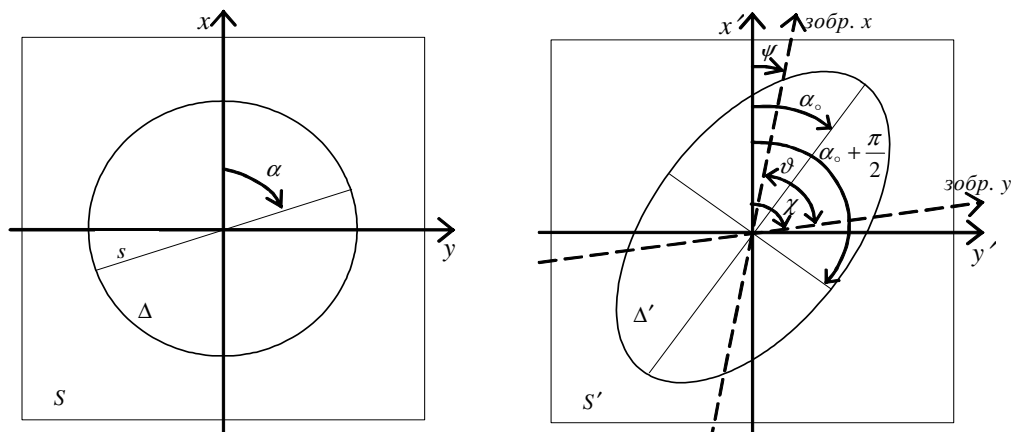


Рис. 1. Схема і напрями відображення  $\Delta \subset S$  на  $\Delta' \subset S'$

Найбільшою проблемою практичного запровадження розкритого рішення є вираження функцій, які реалізують відображення (2). У класичній постановці теорії відображення поверхонь така задача інтерпретується як обернена задача цієї теорії, в якій за відображуваними областями  $\Delta \subset S$  та  $\Delta' \subset S'$  і його характеристиками встановлюється вид функцій (2). Застосування класичного розв'язку оберненої задачі для вирішення поставленої проблеми безперспективне, оскільки характеристики відображення априорі невідомі, а вихідними даними є лише дискретні показники зміни координат геодезичних пунктів. Гіпотетично можна допустити подібне рішення, якщо залучити додаткову інформацію геофізичного походження про напружено-деформований стан земної поверхні. З огляду на такі реалії і з урахуванням дискретної структури геодезичних даних єдиним доступним засобом оцінювання неперервних у просторі деформацій є емпіричний, який передбачає апроксимацію невідомих функцій за відомим дискретним розподілом. Завдання виведення емпіричних формул, які відповідають функціям (2), не має однозначного рішення. Тим самим порушуються умови гомеоморфізму відображення. З цієї причини вирішення необхідно аргументувати з погляду коректності його постановки, а одержані емпіричним шляхом результати оцінювати тими чи іншими показниками точності.

У такій ситуації для досягнення рішення доцільно залучити спосіб найменших квадратів [4]. Тоді загальну форму функцій (2) можна дещо конкретизувати:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + c_1 u_1(x, y) + \dots + c_k u_k(x, y) \\ y' &= y + d_1 v_1(x, y) + \dots + d_k v_k(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Тут  $c_i, d_i$  – коефіцієнти, які підлягають обчисленню способом найменших квадратів;  $u(x, y), v(x, y)$  – заздалегідь вибрані функції визначеного класу, які задовольняють вимоги загальної теорії відображення поверхонь. Інтерполюванням емпіричних даних можна наближувати (21) до істинної структури відображення  $\Delta \subset S$  на  $\Delta' \subset S'$ , якщо збільшувати число  $k$  функцій  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$ . Результату досягають, розв'язуючи систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A^T P_u A c - A^T P_u u &= 0 \\ A^T P_v A d - A^T P_v v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

відносно векторів невідомих коефіцієнтів  $c$  і  $d$ . Вектори  $u$  і  $v$  формуються різницями координат  $u_i = x'_i - x_i$  і  $v_i = y'_i - y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), точність вимірювань яких розкривають діагональні вагові матриці відповідно  $P_u$  і  $P_v$ . Матрицю коефіцієнтів  $A$  розмірності  $n \times k$  складають значення частинних похідних визначених функцій за відповідними їм невідомими коефіцієнтами. Не вдаючись до деталей загальноновідомих обчислень [4], варто в підсумку звернути увагу на деякі особливості оцінки точності кінцевих результатів. Середні квадратичні похибки одиниці ваги  $\mu_u$  та  $\mu_v$ ,

обчислені за формулою Бесселя, виражають точність апроксимації визначених функцій  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  і є показником відповідності умові гомеоморфізму відображення. Точність коефіцієнтів емпіричних формул, визначених за результатами апроксимації, виражають кореляційні матриці

$$M_c^2 = \mu_u^2 Q_u; \quad M_d^2 = \mu_v^2 Q_v, \quad (23)$$

де  $Q_u = (A^T P_u A)^{-1}$  і  $Q_v = (A^T P_v A)^{-1}$  – матриці вагових коефіцієнтів. Середня квадратична похибка  $m_X$  будь-якої з характеристик відображення  $X$  має дві складові частини  $m_u$  і  $m_v$ :

$$m_X^2 = m_u^2 + m_v^2. \quad (24)$$

Це випливає з того, що  $X$  виражають частинні похідні  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  та  $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ , які визначаються роздільною апроксимацією функцій  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$ . Враховуючи результати апроксимації,

$$m_X^2 = \mu_u^2 Q_{F_u} + \mu_v^2 Q_{F_v}. \quad (25)$$

Величини  $Q_{F_u} = F_u Q_u F_u^T$ ,  $Q_{F_v} = F_v Q_v F_v^T$  виражають обернені ваги, а вектори  $F_u$  і  $F_v$  формуються значеннями  $F_{u_j} = \left( \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial c_j} \right)_o$ ,  $F_{v_j} = \left( \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial d_j} \right)_o$ ;  $j = \overrightarrow{1, k}$ . Беручи до уваги позначення

$$(8), \quad F_{u_j} = \left( \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial c_j} + \frac{\partial X}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial c_j} + \frac{\partial X}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial c_j} \right)_o, \quad F_{v_j} = \left( \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial d_j} + \frac{\partial X}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial d_j} + \frac{\partial X}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial d_j} \right)_o. \quad \text{За потреби}$$

оцінювання точності групи  $m$  характеристик  $X_i$  ( $i = \overrightarrow{1, m}$ ),  $F_u$  і  $F_v$  – матриці розмірності  $m \times k$ , утворені елементами  $F_{u_{ij}}$  і  $F_{v_{ij}}$  окремо для кожної з характеристик  $X_i$ . Тоді  $Q_{F_u}$  і  $Q_{F_v}$  – вагові матриці розмірності  $m \times m$ , а точність сукупності характеристик  $X_i$  виражає кореляційна матриця  $M_X^2$  тієї самої розмірності  $m \times m$ .

**Висновки.** У роботі вирішено завдання оцінювання горизонтальних деформацій земної поверхні, яке ґрунтується на теорії квазіконформних відображень поверхонь. Обґрунтовано аспекти та перспективи його практичного застосування в геодинамічних дослідженнях локального та регіонального масштабів за результатами повторних спостережень положення геодезичних пунктів у системі прямокутних координат проекції Гаусса–Крюгера. Зважаючи на теоретичне походження, одержаний розв’язок є альтернативним аналогічному розв’язку методом скінченних елементів на основі теорії деформації суцільного середовища. За умови лінійної деформації ці розв’язки тотожні. Разом з тим, його можна вважати узагальненим відносно розв’язанню методом скінченних елементів. Висновок щодо узагальнення вмотивований перспективами описування нелінійної деформацій земної поверхні з оцінкою точності кінцевих результатів.

1. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О.М. Марченко, К.Р. Третьак, А.Я. Кульчицький, Ю.І. Голубінка, Д.О. Марченко, Н.П. Третьак / за заг. ред. О.М. Марченка та К.Р. Третьака. – Л.: Львівська політехніка, 2012. – 308 с. 2. Есиков Н.П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н.П. Есиков. – Новосибирск: Наука, 1979. – 173 с. 3. Ландау Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 788 с. 4. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1968. – 440 с. 5. Мецерьков Г.А. Теоретические основы математической картографии / Г.А. Мецерьков. – М.: Недра, 1968. – 160 с. 6. Норден А.П. Теория поверхностей / А.П. Норден. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 261 с. 7. Тадеев А.А. О картографическом смысле инвариантных характеристик деформации земной поверхности / А.А. Тадеев // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1986. – №43. – С.117–121. 8. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – 265 с.