За час існування кафедри підготовлено та захищено 53 докторські та кандидатські дисертації, опубліковано 24 монографії і підручники та понад 700 наукових статей. Більш як 20 років кафедра є опорною для геодезичних кафедр Західного регіону України.

1. Мороз О. Кафедрі геодезії – 130 років. – Львів, 2001. – 158 с. 2. Островський А. З нагоди 40-річчя галузевої науково-дослідної лабораторії геодезичного моніторингу та рефрактометрії: Збірник матеріалів XI Міжнародного науково-технічного симпозіуму "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS- та GIS-технології. – Алушта, 2006. – С.18–20.

УДК 528.33:551.24

М.М. Фис, А.Р. Согор, З.О. Котик
Національний університет "Львівська політехніка"

ЗНАХОДЖЕННЯ ОЦІНКИ ДЛЯ ГУСТИНИ В ЦЕНТРІ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ

Встановлені межі значень густини в центрі планети, які дають змогу створювати об'єктивніші моделі розподілу густини планети.

Values of density limits in the center of planets were found. This allows creating more objective models of planets density distribution.

Постановка проблеми. Дослідження внутрішньої структури на основі спостережливої інформації є надзвичайно актуальним завданням. При цьому визначальним є розміщення мас d всередині еліпсоїдальної планети і особливо в її центрі. Встановлення співвідношень між d_0 і значенням на поверхні тіла дає можливість встановлювати допустимі величини для d_0.

Зв'язок між важливими науковими і практичними завданнями. Створення обґрунтованих моделей розподілу дає можливість вивчати внутрішню структуру планет, а узгоджені параметри – використовувати їх в астрономії для вивчення орбітальних рухів планет. Зв'язок між поверхневим значенням густини і d_0 дає змогу досліджувати вплив структури кора-мантія на загальнопланетарну внутрішню будову небесних тіл.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, в яких започатковано вирішення цієї проблеми. Визначення інтервалів значень d_0 розглядають багато робіт [1, 2], при цьому на основі певних допущень на перевірку густини отримуються обмеження як знизу, так і зверху. Відомі моделі густини Роша, Дарвіна в сферично-симетричному випадку пов'язують значення на поверхні і в центрі планети. На відміну від них в роботі, крім нерівностей для d_0, які узгоджуються з цими дослідженнями, проводяться залежності між d_0 і поверхневою густиною загальнопланетарного еліпсоїда.

Невирішені частини загальної проблеми. Встановлений зв'язок між d_0 і значенням на поверхні еліпсоїда не повністю відтворює об'єктивну картину, оскільки еліпсоїд – це лише апроксимація існуючої фігури планети. Тому виникає питання перенесення наведених результатів на випадок реальної планети, тобто виникає питання оцінки точності у цьому дослідженні.

Постановка завдання. Для функції розподілу мас, яка передбачається неперервно-диференційованою зі своїми похідними, потрібно встановити залежність між значенням d_0 в центрі планети і її середньою величиною на поверхні, і на основі цього визначити можливі верхню та нижню межі для d_0.

Виклад основного матеріалу. Зобразимо похідні функції густини $d(x_1, x_2, x_3)$ за біортогональними розкладами [3], вважаючи їх кусково-неперервними, тобто

$$\frac{\partial d}{\partial x_i} = \frac{1}{a_i} \sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} d^{i}_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3),$$

де

$$d^{i}_{mnk} = \int_t \frac{\partial d}{\partial x_i} \omega_{mnk} / l_{mnk}$$

$\{W_{mnk}\}, \{W_{mnk}\}$ дві біортогональні системи многочленів в еліпсоїді t, причому

$$W_{mnk} = \frac{1}{2^N{}_{m!n!k!}} \frac{\partial}{\partial x_1^{\,m} \partial x_2^n \partial x_3^k} (p^2 - 1)^N .$$

Функцію d за певних умов [1] можна відтворити за її похідними, причому

$$d(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a_1} \int_0^{x_1} \frac{\partial d}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \frac{1}{a_2} \int_0^{x_2} \frac{\partial d}{\partial x_2}(0, x_2, x_3) dx_2 + \frac{1}{a_3} \int_0^{x_3} \frac{\partial d}{\partial x_3}(0,0, x_3) dx_3 + d_0, \qquad (1)$$

де $d_{\mathbf{o}}$ – значення густини в центрі мас.

Розпишемо функцію, подану виразом (1), детальніше:

$$d(x_1,x_2,x_3) = [\sum_{m+n+k=0}^{\infty} d^{1}{}_{m+1nk} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} d^{2}_{mn+1k} +$$

$$+ \frac{1}{a_3} d^{3}_{mnk+1}] \frac{\partial^{N-1}(r^2-1)^N}{\partial x_1^m \partial x_2^n \partial x_3^k}] \frac{1}{2^N m!n!k!} + \sum_{m+n+k=0}^{\infty} \begin{matrix} [d^1_{onk} \frac{x_1}{a_1} W_{onk}(x_1,x_2,x_3) \\ + \frac{x_2}{a_2} d^2_{mok} W_{mok}(0,x_2,x_3) + \frac{x_3}{a_3} d^3_{mn0} W_{mn0}(0,0,x_3)]. \end{matrix}$$

Після чого підставимо її у вираз стоксової сталої нульового порядку. У результаті одержимо

$$C_{00} = [d_0 + \frac{1}{10}(d^1_{100} + d^2_{010} + d^3_{001})] \frac{V}{M},$$

де коефіцієнти розвитку будуть $d^1_{100} = 5d_c J^1_{100}$; $d^2_{010} = 5d_c J^2_{010}$; $d^3_{001} = 5d_c J^3_{001}$.

Своєю чергою, моменти похідних виражаються так:

$$J^1_{100} = \frac{1}{a_1}(-J_{000} + s^{\,1}_{100}), \quad J^2_{010} = \frac{1}{a_2}(-J_{000} + s^{\,2}_{010}), \quad J^3_{001} = \frac{1}{a_3}(-J_{000} + s^{\,3}_{001}),$$

де $J_{000} = \frac{1}{M} \int_t d dt = 1$ – нульовий степеневий момент густини;

$$s^{\,1}_{100} = \int_s x_1 \cos a ds = \int_s (\frac{x_1^2}{a_1}) \, G ds = s_{200} a_3 ;$$

$$s^{\,2}_{010} = \int_s (\frac{x_2}{a_2})^2 G ds = s_{200} a_3, \quad s^{\,3}_{001} = \int_s (\frac{x_3}{a_3})^2 ds = s_{020} a_3 ,$$

а
$$G=\sqrt{(1+\frac{x_1^2}{a_1^2}\,(\frac{a_3^2}{a_1^2}-1)+\frac{x_2^2}{a_2^2}\,(\frac{a_3^2}{a_2^2}-1))}\ ,$$

звідки
$$\frac{5}{2}J_{000}=d_0+\frac{1}{2}a_3(s_{200}+s_{020}+s_{002})=d_0+\frac{1}{2}a_3\int_s dGds\ /dc\,.$$

Враховуючи, що $J_{000}=1$, одержимо
$$d_0=\frac{5}{2}-\frac{a_3}{2d_c}\int_s dGds\ . \qquad (2)$$

В такий спосіб формула (2) пов'язує середнє значення густини d_c на поверхні s з величиною d_0 в центрі планети, а також є можливим провести оцінку точності, тобто побудувати таку нерівність:
$$2{,}5\text{-}1{,}5\frac{d_p}{d_c}\le d_0\le 2{,}5\,,$$

на основі якої можна отримати
$$\frac{a_3}{2}\int dGds\ \le 0{,}5d_pS_e\le 1.5d_pV_e\,,$$

де d_p – поверхневе значення густини, а Ve, Se – об'єм і площа еліпсоїда.

Наведемо таблицю допустимих значень для густини d кількох небесних тіл.

Допустимі значення для густини

	d_c	d_p	$d_0^{\min}$	$d_0^{\max}$
Земля	5,515	2,7	9,73	13,79
Місяць	3,34	2,7	4,3	8,35
Марс	3,94	3,0	5,35	9,85

Висновки. Із результатів, наведених у таблиці, зрозуміло, що отримані співвідношення слід враховувати для побудови моделей розподілу мас, а двосторонні нерівності для d_0 дають можливість істотно уточнити як сферично-симетричні моделі, так і тривимірні, що дає змогу ефектніше вивчати внутрішню будову планети.

1. Бермант А.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1964. – 663 с. 2. Буллен К.Е. Плотность Земли. – М.: Мир, 1978. – 442 с. 3. Tisserman F. Fraite de Mecannique Celeste. – Paris, 1891. – Vol. II. 4. Мещеряков Г.А., Фыс М.М. О биортогональных системах внутри эллипсоида. – В кн: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. – М., 1981. – С.120.