УДК 519.7

Гарантированное оценивание параметров зашумленного гармонического сигнала по короткой выборке

Л.С. Житецкий[1], Ю.Д. Чирка[2]

Аннотация – **The paper deals with the problem of estimating the magnitude, frequency and also the initial phase of sinusoids from noisy measurement implemented in the discrete time. Within the set-membership identification approach, a new method for deriving lower and upper bounds on these parameters in the presence of an arbitrary bounded noise is advanced.**

Ключевые слова – **идентификация, множественное оценивание, ограниченная помеха, синусоидальный сигнал, короткая выборка.**

I. Введение

При решении ряда прикладных задач обработки результатов измерения часто возникает необходимость в получении оценок амплитуды, частоты и, возможно, начальной фазы зашумленного гармонического сигнала по короткой выборке. Эти задачи в различных постановках рассматривались в работах [1–5].

Трудности, которые возникают в подобных задачах оценивания, состоят в том, что такие параметры как частота и начальная фаза входят в исходное уравнение наблюдения нелинейно.

Существует два подхода к задаче оценивания в условиях шума: стохастический и нестохастический. В рамках нестохастического подхода, который активно развивается в последнее время многими исследователями [6,7], метод построения множественных оценок этих параметров предложен в [1,2]. Стохастический подход, приводящий к точечным оценкам, используется в [3–5].

В настоящей работе предлагается новый метод построения гарантированных оценок указанных параметров. Особенность этого метода состоит в том, что реализация алгоритма множественного оценивания не требует никаких нелинейных операций. При этом в отличии от [2] нет никакой необходимости в априорных множественных оценках амплитуды и частоты измеряемого сигнала.

II. Постановка задачи

Пусть имеется гармоническая переменная $x = x(t)$, описываемая в непрерывном времени t уравнением

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,, \qquad (1)$$

в котором амплитуда $A = \max|x(t)|$, круговая частота ω и начальная фаза φ априори неизвестны. Считается, что эта переменная измеряется с аддитивной помехой ξ, причем сами измерения осуществляются в дискретные моменты времени $t = nT\ (n = 0,1,2,\dots,N-1)$, где T обозначает интервал дискретности, а N – число измерений. Таким образом, на выходе измерителя вместо сигнала (1) появляется другой сигнал

$$y_n = A\sin(\tilde{\omega} n + \varphi) + \xi_n\,, \qquad (2)$$

где $\tilde{\omega} = \omega T$ – относительная частота данного сигнала. Предполагается, что число N удовлетворяет условию

$$N \le \frac{(3\dots4)\pi}{\omega T}\,. \qquad (3)$$

Относительно помехи наблюдения ξ_n, как и в [2, 6], предполагается её ограниченность по модулю:

$$|\xi_n| \le \varepsilon\,; \qquad (4)$$

при этом оценка сверху ε на уровень $\{\xi_n\}$ считается априори известной.

Задача состоит в том, чтобы в условиях (3), (4) по имеющейся выборке $\{y_n\} = y_0,\dots,y_{N-1}$ получить гарантированные оценки параметров A, ω и φ сигнала (1) в форме соответствующих ограниченных множеств принадлежности $[\underline{A},\overline{A}]$, $[\underline{\omega},\overline{\omega}]$, $[\underline{\varphi},\overline{\varphi}]$ таких, что

$$A \in [\underline{A},\overline{A}],\quad \omega \in [\underline{\omega},\overline{\omega}],\quad \varphi \in [\underline{\varphi},\overline{\varphi}]\,. \qquad (5)$$

III. Построение гарантированных оценок

Предлагаемый подход к получению гарантированных оценок (5) предусматривает двухэтапное оценивание параметров ω, A и φ. На первом этапе строятся последовательности неухудшаемых апостериорных оценок $\underline{\tilde{\omega}}_n \le \underline{\tilde{\omega}}_{n+1} \le \dots \le \underline{\tilde{\omega}}_{N-1}$, $\overline{\tilde{\omega}}_n \ge \overline{\tilde{\omega}}_{n+1} \ge \dots \ge \overline{\tilde{\omega}}_{N-1}$ границ интервалов $[\underline{\tilde{\omega}}_n, \overline{\tilde{\omega}}_n] \ni \tilde{\omega}$. В основу алгоритма оценивания $\underline{\tilde{\omega}}_n, \overline{\tilde{\omega}}_n$ положена одна простая идея, состоящая в том, что незашумленный сигнал

$$x_n = A\sin(\tilde{\omega} n + \varphi)\,, \qquad (6)$$

полученный дискретизацией процесса (1), описывается линейным однородным разностным уравнением

$$x_n + 2cx_{n-1} + x_{n-2} = 0\,, \qquad (7)$$

в котором коэффициент c связан с $\tilde{\omega}$ соотношением

$$c = \cos\tilde{\omega} \qquad (8)$$

[1] Межд. научно-уч. центр информ. технологий и систем НАН Украины и МОНМС Украины, просп. Глушкова, 40, Киев, 03680 ГСП, УКРАИНА, E-mail: golid@i.ua
[2] Национальный авиационный университет, просп. Комарова, 1, Киев, 03680, УКРАИНА, E-mail: chirka@ukr.net

(см., например, [7, п. 2.3]). Такой приём позволяет свести построение текущих множественных оценок $[\underline{\tilde\omega}_n, \overline{\tilde\omega}_n]$ к решению системы $N-2$ совместимых неравенств

$$\left|y_n + 2y_{n-1}c + y_{n-2}\right| \le 4\varepsilon, \quad n = 2,\dots, N-1 \qquad (9)$$

относительно неизвестного c.

(Неравенства (9) образуются из (7) с учетом ограничений (4) и того, что в силу (2),(6) имеем $y_n = x_n + \xi_n$.)

Алгоритмы получения текущих оценок $[\underline{c}_n, \overline{c}_n] \ni c$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\underline{c}_n = \begin{cases} (-4\varepsilon - y_n - y_{n-2})/2y_{n-1} & \text{при } y_{n-1} > 0, \\ (4\varepsilon - y_n - y_{n-2})/2y_{n-1} & \text{при } y_{n-1} < 0, \end{cases} \qquad (10)$$

если $\underline{c}_n > \underline{c}_{n-1}$,

$$\underline{c}_n = \begin{cases} (4\varepsilon - y_n - y_{n-2})/2y_{n-1} & \text{при } y_{n-1} > 0, \\ (-4\varepsilon - y_n - y_{n-2})/2y_{n-1} & \text{при } y_{n-1} < 0, \end{cases} \qquad (11)$$

если $\overline{c}_n < \overline{c}_{n-1}$, и

$$\underline{c}_n = \underline{c}_{n-1}, \quad \overline{c}_n = \overline{c}_{n-1} \qquad (12)$$

во всех остальных отдельных случаях $(n = 2,\dots, N-1)$. Начальные оценки в алгоритме (10) – (12) принимаются равными $\underline{c}_0 = \underline{c}_1 = -1$, $\overline{c}_0 = \overline{c}_1 = 1$, что следует прямо из (8) с учетом того, что $\tilde\omega \in [0, \pi]$.

Для построения множественных оценок $[\underline{A}, \overline{A}] \ni A$, $[\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] \ni \varphi$ определим на втором этапе ограниченный четырехугольник $P_n(\Omega)$, образуемый пересечением полос $\Pi_n(\Omega)$ и $\Pi_{n+1}(\Omega)$ вида

$$\Pi_n(\Omega) = \{\tilde{\vec{A}} : \left|\tilde A_1 \sin\Omega n + \tilde A_2 \cos\Omega n - y_n\right| \le \varepsilon\}, \qquad (13)$$

где $\tilde{\vec{A}} = [\tilde A_1, \tilde A_2]^T$. В силу (2), (4) при $\Omega = \tilde\omega$ имеем $\vec{A} \in P(\tilde\omega)$, где $A_1 = A\cos\varphi$, $A_2 = A\sin\varphi$. Очевидно, что справедлива оценка

$$\vec{A} \in \bigcup_{\underline{\tilde\omega}_{N-1} \le \Omega \le \overline{\tilde\omega}_{N-1}} P_{i,i+1}(\Omega) \supset \overline{P}_{n,n+1}. \qquad (14)$$

Здесь $\overline{P}_{n,n+1}$ – покрывающий прямоугольник минимального “размера”, определяемый как

$$\overline{P}_{n,n+1} := [\underline{a}_1^n, \overline{a}_1^n] \times [\underline{a}_2^n, \overline{a}_2^n]. \qquad (15)$$

В этом выражении

$$\underline{a}_1^n = \min_{i=1,\dots,4} \min_{\Omega \in [\underline{\tilde\omega}_{N-1}, \overline{\tilde\omega}_{N-1}]} a_1^{i,n}(\Omega), \qquad (16)$$

$$\overline{a}_1^n = \max_{i=1,\dots,4} \max_{\Omega \in [\underline{\tilde\omega}_{N-1}, \overline{\tilde\omega}_{N-1}]} a_1^{i,n}(\Omega), \qquad (17)$$

$$\underline{a}_2^n = \min_{i=1,\dots,4} \min_{\Omega \in [\underline{\tilde\omega}_{N-1}, \overline{\tilde\omega}_{N-1}]} a_2^{i,n}(\Omega), \qquad (18)$$

$$\overline{a}_2^n = \max_{i=1,\dots,4} \max_{\Omega \in [\underline{\tilde\omega}_{N-1}, \overline{\tilde\omega}_{N-1}]} a_2^{i,n}(\Omega), \qquad (19)$$

где $a_1^{i,n}(\Omega)$, $a_2^{i,n}(\Omega)$ $(1 \le i \le 4)$ – решение четырех систем линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a_1^{i,n}(\Omega)\sin\Omega n + a_2^{i,n}(\Omega)\cos\Omega n - y_n \pm \varepsilon = 0, \\ &a_1^{i,n}(\Omega)\sin\Omega(n+1) + a_2^{i,n}(\Omega)\cos\Omega(n+1) - y_{n+1} \pm \varepsilon = 0. \end{aligned}\right\} . \qquad (20)$$

(По теореме Вейерштрасса граничные значения (16)–(19) достигаются либо внутри интервала $[\underline{\tilde\omega}_{N-1}, \overline{\tilde\omega}_{N-1}]$, либо на его концах.). Поскольку множественная оценка (14) справедлива для всех $n = 0,1,\dots,N-1$, то $\vec{A} \in \overline{P}$, где

$$\overline{P} \in \bigcap_{n=0}^{N-1} \overline{P}_{n,n+1} \qquad (21)$$

– прямоугольник с вершинами $P_1(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$, $P_2(\underline{a}_1, \overline{a}_2)$, $P_3(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ и $P_4(\overline{a}_1, \underline{a}_2)$. Отсюда окончательно получаем гарантированные оценки

$$\min_{i=1,\dots,4}\left\|P_i\right\| \le A \le \max_{i=1,\dots,4}\left\|P_i\right\|, \qquad (22)$$

$$\min_{i=1,\dots,4} \varphi_i \le \varphi \le \max_{i=1,\dots,4} \varphi_i, \qquad (23)$$

где значения $\varphi_1 = \operatorname{Arcsin} \underline{a}_2 / \left\|P_1\right\|$, $\varphi_2 = \operatorname{Arcsin} \overline{a}_2 / \left\|P_2\right\|$, $\varphi_3 = \operatorname{Arcsin} \overline{a}_2 / \left\|P_3\right\|$, $\varphi_2 = \operatorname{Arcsin} \underline{a}_2 / \left\|P_4\right\|$ уточняются в зависимости от того, в каком квадранте находится вершина P_i прямоугольника (21).

Результаты проведённого моделирования подтвердили эффективность предложенного метода.

III. Вывод

В рамках метода множественного оценивания можно довольно просто получить гарантированные оценки амплитуды, частоты и начальной фазы зашумленного гармонического сигнала по короткой выборке при условии, что уровень шума априори известен.

Список ссылок

[1] L. Jaulin, and E. Walter, "*Guaranteed nonlinear set estimation via interval analysis*," in *Bounding Approaches to System Identification*, (M. Milanese, etc., Eds.), New York, Chapt. 23, pp. 363-381, 1996.

[2] В. М. Кунцевич, "Гарантированные оценки для некоторых классов функций, нелинейных по параметрам," *Проблемы управления и информатики*, №3, сс. 17-26, 2005.

[3] J. J. Fuchs, "Identification of real sinusoids in noise, the global matched filter approach," in *Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification*, Saint-Malo, France, Jul. 2009, pp. 1127-1132.

[4] І. Г. Прокопенко та І. П. Омельчук, " Квазіоптимальна оцінка частоти гармонічного сигналу на обмеженому інтервалі спостереження," *Електроніка та системи управління*, №1, сс. 39-45, 2009.

[5] І. Г. Прокопенко, І. П. Омельчук, Ю.Д. Чирка та С. В. Мігель, "Оцінка параметрів гармонічного сигналу на обмеженому інтервалі спостереження," *Електроніка та системи управління*, №4, сс. 31-38, 2010.

[6] В. М. Кунцевич, "*Управление в условиях неопределённости: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации*," Киев, Наук. думка, 2006.

[7] Л. С. Житецкий и В. И. Скурихин "*Адаптивные системы управления с параметрическими и непараметрическими неопределённостями*," Киев, Наук. думка, 2010.