

# Сравнительный анализ цифровых дифференцирующих фильтров

Е.Е. Александров<sup>1</sup>, Т.Е. Александрова<sup>1</sup>, В.А. Кононенко<sup>1</sup>

**Abstract – In the paper noise-immunity of digital automatic-control systems with digital differentiating filters is estimated by comparison of their amplitude-frequency responses.**

**. Ключевые слова – Цифровая система автоматического управления, Цифровой дифференцирующий фильтр, Помехозащищенность, Частотная характеристика, Фильтр Ланцоша.**

## I. ВВЕДЕНИЕ

Современные цифровые системы автоматического управления (САУ) реализуют алгоритмы управления сложными техническими системами, находящимися под влиянием широкого спектра внешних возмущений. Это обстоятельство, а также сложные взаимные связи между отдельными системами и агрегатами таких объектов, являются причиной того, что информация о состоянии объекта в каждый момент времени является «зашумленной» высокочастотными помехами. Пониженная помехозащищенность информационных сигналов приводит к значительному снижению качества управления.

Помехозащищенность цифровой САУ существенно снижается, если алгоритм управления использует информацию о производной «зашумленного» сигнала. Действительно, если первая разность цифрового сигнала оценивается формулой

$$y[nT] = \frac{1}{T} \{x[nT] - x[(n-1)T]\}, \quad (1)$$

то дискретная передаточная функция фильтра (1) может быть записана в виде

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}), \quad (2)$$

где  $T$  – период дискретности цифровой САУ,  $Z\{y[nT]\}$  и  $Z\{x[nT]\}$  –  $Z$ -преобразования соответственно выходного и входного сигналов фильтра (1). Используя уравнение связи между комплексными переменными  $z$  и  $s$   $Z$ -преобразования и преобразования Лапласа [1]

$$z = e^{sT}, \quad (3)$$

получаем из соотношения (2) выражение для частотной передаточной функции фильтра

$$W(j\omega) = \frac{1}{T} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (4)$$

Тогда действительную и мнимую части можно записать в виде

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{1}{T} (1 - \cos \omega T); \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{1}{T} \sin \omega T,$$

а амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ) характеристики фильтра (1) определяются формулами:

$$M(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2 W(j\omega) + \operatorname{Im}^2 W(j\omega)} = \left| \frac{2}{T} \sin \frac{\omega T}{2} \right|; \quad (5)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \quad (6)$$

АЧХ и ФЧХ фильтра (1) при  $T = 0,04$  с приведены на рис. 1 и рис.2 (кривые 1). Анализ этих кривых приводит к выводу, что оценка производной «зашумленного» дискретного сигнала  $x[nT]$  с помощью формулы (1) резко снижает помехозащищенность цифровой САУ, усиливая амплитуды высокочастотных шумов. Для оценки производной «зашумленных» дискретных сигналов необходимо использовать цифровые фильтры более сложной структуры, чем фильтр (1).

## II. ВЫБОР ЦИФРОВОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА

Выбор структуры и параметров дифференцирующего фильтра будем осуществлять в классе фильтров Ланцоша [2], общее уравнение которых имеет следующий вид

$$y[nT] = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)x[(n-k)T], \quad (7)$$

где  $N$  – порядок фильтра.

К обеим частям уравнения (7) применим операцию  $Z$ -преобразования

$$Z\{y[nT]\} = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)z^{-k} Z\{x[nT]\}, \quad (8)$$

Из соотношения (8) запишем формулу для дискретной передаточной функции фильтра Ланцоша

<sup>1</sup>Национальний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, Україна, E-mail: [sla-va\\_diver@rambler.ru](mailto:sla-va_diver@rambler.ru)

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)z^{-k}. \quad (9)$$

С учетом формулы (3), запишем выражение для частотной передаточной функции фильтра

$$W(j\omega) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k)e^{-j\omega kT}. \quad (10)$$

В соотношении (10) выделим действительную и мнимую части, учитывая, что

$$e^{-j\omega kT} = \cos \omega kT - j \sin \omega kT.$$

В результате получаем

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k) \cos \omega kT; \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{3}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} (N-k) \sin \omega kT. \quad (12)$$

С учетом соотношений (5) и (6) можно записать формулы для расчета АЧХ и ФЧХ фильтра Ланцоша  $N$ -го порядка

$$M(\omega) = \frac{6}{TN(N+1)(2N+1)} \sum_{k=1}^N k \sin \omega kT; \quad (13)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos \omega kT}{\sin \omega kT}. \quad (14)$$

На рис. 1 и рис. 2 приведены АЧХ и ФЧХ фильтров Ланцоша построенные с помощью следующих соотношений:

- Фильтр Ланцоша 1-го порядка  $N=1$  (кривая 2):

$$M(\omega) = \frac{1}{T} |\sin \omega T|; \quad (15)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos \omega T}{\sin \omega T}; \quad (16)$$

- Фильтр Ланцоша 2-го порядка  $N=2$  (кривая 3):

$$M(\omega) = \frac{1}{5T} |2 \sin 2\omega T + \sin \omega T|; \quad (17)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos 2\omega T}{\sin 2\omega T}; \quad (18)$$

- Фильтр Ланцоша 3-го порядка  $N=3$  (кривая 4):

$$M(\omega) = \frac{1}{14T} |3 \sin 3\omega T + 2 \sin 2\omega T + \sin \omega T|; \quad (19)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos 3\omega T}{\sin 3\omega T}; \quad (20)$$

- Фильтр Ланцоша 4-го порядка  $N=4$  (кривая 5):

$$M(\omega) = \frac{1}{30T} \left| 4 \sin 4\omega T + 3 \sin 3\omega T + 2 \sin 2\omega T + \sin \omega T \right|; \quad (21)$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\cos 4\omega T}{\sin 4\omega T}; \quad (22)$$

Анализ этих кривых приводит к выводу, что с повышением порядка фильтра Ланцоша полоса пропускания уменьшается. До середины полосы пропускания имеет место фазовое опережение, а затем ФЧХ проходит через нуль.

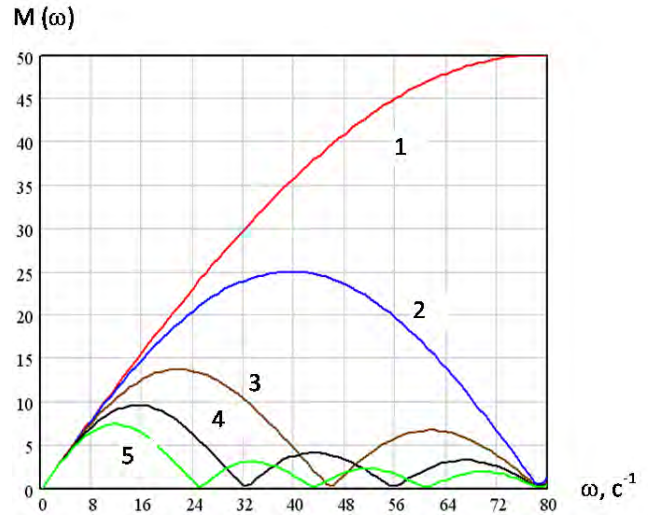


Рис. 1. АЧХ цифровых фильтров Ланцоша

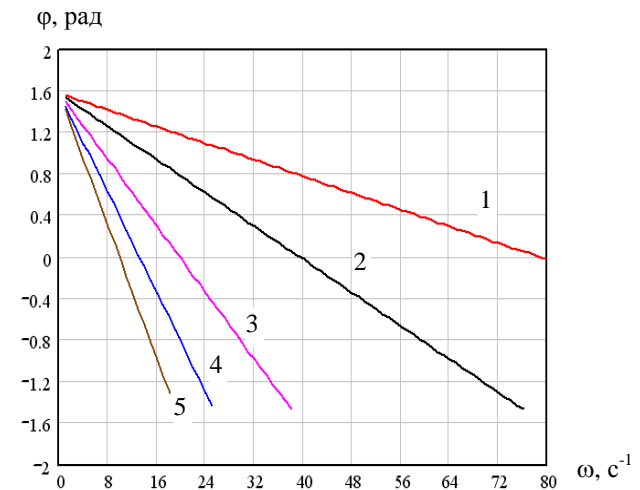


Рис.2. ФЧХ цифровых фильтров Ланцоша

### III. ВЫВОД

Получение производной по времени от цифрового информационного сигнала может быть получено с помощью фильтра Ланцоша, причем частота полезной составляющей дифференцируемого сигнала не должна превышать половины полосы пропускания фильтра.

### СПИСОК ССЫЛОК

- [1] Александров Є.Є. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Т. I. Теорія автоматичного керування / Є.Є. Александров, Е.П. Козлов, Б.І. Кузнецов. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – 490 с.
- [2] Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. – М.: Недра, 1984. – 221 с.