

Синтез робастного ПІД-регулятора для рухомого об'єкту з використанням теорії лінійних матричних нерівностей

А.А. Тунік¹, О.П. Басанець¹

Анотація – This paper deals with a method of Robust PID-controller synthesis via LMI approach for a set of nominal and parametrical perturbed models of moving object. The efficiency of the designed control system is investigated on the example of rotating solid body guidance by laser beam.

Ключові слова – ПІД-регулятор, лінійні матричні нерівності, обертове тверде тіло.

I. ВСТУП

Не дивлячись на багатолітню історію існування ПІД-регуляторів, ця область продовжує розвиватися [1]. Особливий інтерес представляють робастні ПІД-регулятори, які гарантують задану якість системи при наявності невизначеностей в об'єкті керування. В даній роботі для синтезу робастного ПІД-регулятора пропонується використовувати методи теорії лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [2,3]. Перевагою використання теорії ЛМН є можливість синтезу одного (спільного) регулятора для деякого політопу матриць, що описують об'єкт [4]. Використання так званих γ -оптимальних регуляторів [2] в системах управління надає системі властивості нечутливості до зовнішніх неструктурованих збурень з деяким ступенем γ .

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У роботі розглядається синтез системи, що гасить зовнішні неструктуровані збурення, обмежені за модулем. Під зовнішніми неструктурованими збуреннями розуміємо турбулентний вітер, у якості імітаційної моделі якого використовується формуючий фільтр Драйдена. Так як в спектральних характеристиках турбулентного вітру наявна невизначеність, то його опис у вигляді фільтру Драйдена може не відповідати реальній ситуації. Тому відносно моделі вітру робиться припущення, що ці збурення обмежені за модулем.

У якості вихідної математичної моделі об'єкта керування будемо приймати систему диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + D_i d(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Fr(t) \end{aligned} \quad (1)$$

де A_i, B_i - елементи політопу, які задовольняють умові : $[A \ B] \in C_0 \{ [A_1 \ B_1], \dots, [A_N \ B_N] \}, i = 1, \dots, N$, де C_0 означає опуклу множину, $x(t)$ - вектор стану, u - сигнал управління, $d(t)$ - зовнішні збурення, $y(t)$ - доступні для

вимірів змінні стану. Детальний вид рівнянь (1) можна знайти в [5], з огляду на громіздкість, вони не наводяться.

Структурна схема системи з ПІД-регулятором наведена на рис. 1.

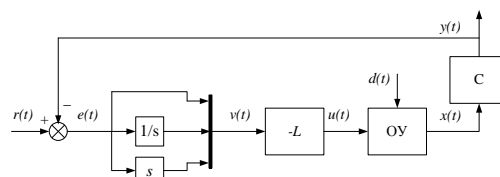


Рис.1. Замкнена система з ПІД-регулятором

Записавши рівняння ПІД-регулятора у просторі станів, система в розширеній формі, яка складається з обертового БПЛА (ОУ) та ПІД-регулятора, при наявності збурень $d(t)$ та задавального сигналу $r(t)$ (рис. 1), може бути представлена у вигляді (1):

$$\frac{d}{dt} x_{ex} = A_{i_{ex}} x_{ex} + B_{i_{ex}} u + D_{i_{ex}} d,$$

$$y_{ex} = C_{ex} x_{ex}$$

Структурна схема системи в такому випадку буде мати вид, представлений на рис. 2.

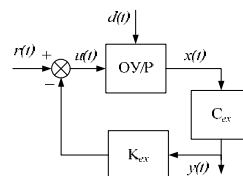


Рис. 2. Замкнена система в термінах розширеного опису у просторі стану

Тобто, в термінах розширеного запису у просторі стану об'єкт/регулятор (рис. 2), задача синтезу ПІД-регулятора зводиться до задачі пошуку статичного зворотного зв'язку, розв'язок якої наведений у розділі III.

III. СИНТЕЗ СТАТИЧНОГО ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Задача синтезу статичного зворотного зв'язку за виходом вирішується у термінах лінійних матричних нерівностей. При цьому, реалізація такого закону управління передбачає стабілізацію множини номінальної та параметрично збурених моделей об'єкта управління (1) та має наступний вигляд:

$$u_{ex}(t) = -K C_{ex} x_{ex},$$

де K - матриця підсилення зворотного зв'язку, що мінімізує наступний функціонал якості:

¹ Національний авіаційний університет, пр. Комарова, 1, Київ, 03058, УКРАЇНА, E-mail: aatunik@mail.ru

$$J = \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt = \int_0^{\infty} (x_{ex}^T Q x_{ex} + u_{ex}^T R u_{ex}) dt \quad (2)$$

Кажуть, що зовнішні збурення гасяться в системі з степенем γ , якщо виконується умова [2-4]:

$$\frac{\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^{\infty} \|d(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^{\infty} (x_{ex}^T Q x_{ex} + u_{ex}^T R u_{ex}) dt}{\int_0^{\infty} (d^T d) dt} \leq \gamma^2, \quad (3)$$

де $z(t)$ - вихідний сигнал, що використовується для оцінки якості управління й визначається як:

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & 0 \\ 0 & \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ex} \\ u_{ex} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, задача зводиться до синтезу матриці підсилення K , при якій мінімізується функціонал якості (2) та виконується умова (3). В роботі [4] показано, що така задача для деякої множини моделей зводиться до виконання наступного алгоритму:

1. Початкові значення: задаємо $p = 0$, $L = 0$; визначаємо γ, Q, R .

2. Розв'язуємо наступну нерівність відносно P , (p - номер ітерації).

$$\begin{bmatrix} P_n A_{iex} + A_{iex}^T P_n + Q & P_n B_{iex} & P_n D_{iex} & L_n^T \\ B_{iex}^T P_n & -R & 0 & 0 \\ D_{iex}^T P_n & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ L_n & 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \leq 0$$

Перерахунок матриць K_{n+1} , L_{n+1} виконується за

$$\text{формулами: } K_{n+1} = R^{-1} (B_{ex}^T P_n) C_{ex}^T (C_{ex} C_{ex}^T)^{-1} \\ L_{n+1} = R K_{n+1} C_{ex} - B_{ex}^T P_n$$

3. Перевірка умови збіжності: $\|K_n - K_{n+1}\| \leq \varepsilon$. Якщо умова виконується, то алгоритм зупиняється.

В результаті виконання даного алгоритму отримуємо коефіцієнти підсилення ПІД-регулятора.

II. ПРИКЛАД

Розглянемо роботу одного з каналів обертового БПЛА з наступними параметрами [5]: маса $m = 14.26$ кг, момент навколо вертикальної осі $I_z = 0.827$ кг·м², площа крила $S = 0.00769$ м², довжина виробу $L = 0.896$ м. Процедура визначення моделі динаміки обертового твердого тіла по огинаючій амплітудно-модульованого сигналу на виході синхронного детектора наведена в роботі [5]. Вектор стану об'єкту та розширений вектор стану відповідно: $x = [y \ \dot{y}]^T$, $x_{ex} = [y \ \dot{y} \ \ddot{y}]^T$. Для моделі обертового твердого тіла розширені матриці простору стану номінальної (при швидкості $V = 377.7$ м/с) та збуреної моделі (при швидкості $V = 256$ м/с) [5] мають вигляд:

$$A_{nex} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -241200 & -14.33 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{pex} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -91970 & -6.887 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_n = [0 \ 0.097 \ 113800 \ 0]^T, B_p = [0 \ 0.074 \ 284510 \ 0]^T.$$

Матриці збурень, які використовуються при синтезі регулятора: $D_n = [0 \ 0 \ 241200 \ 0]^T$, $D_p = [0 \ 0 \ 919700 \ 0]^T$.

Рівень гасіння шумів γ прийнятий рівним 0.92. Отримані в результаті синтезу системи коефіцієнти ПІД-регулятора становлять: $K_p = 3.1608$, $K_d = 2.0523$, $K_i = 0.0101$. Для підвищення якості та точності синтезованої системи була проведена процедура оптимізації, після виконання якої були зменшені H_{∞} -норми функцій чутливості системи. В результаті оптимізації коефіцієнти ПІД-регулятора прийняли значення: $K_p = 2.75$, $K_d = 1.7087$, $K_i = 0.0099$.

Результати моделювання, отримані до та після оптимізації, представлені на рис. 3

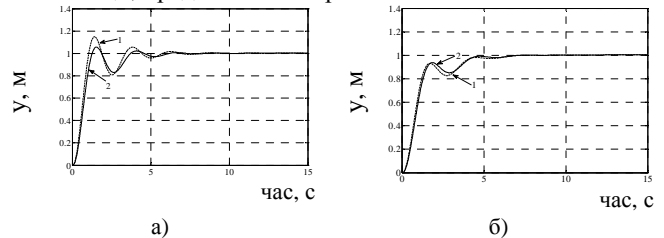


Рис. 3. Результати моделювання з коефіцієнтами ПІД-регулятора, отриманих до (1) та після (2) оптимізації: а) номінальна модель; 2) параметрично збурена модель

Таким чином, після оптимізації, перехідний процес має меншу коливальність та час установлення.

III. ВИСНОВОК

Розглянута методика синтезу робастного ПІД-регулятора за допомогою теорії ЛМН. Зовнішні збурення гасяться системою з наперед заданим рівнем $\gamma > 0$. Результати моделювання демонструють високу ефективність синтезованої системи управління.

СПИСОК ПОСИЛАНЬ

- [1] M.A. Johnson, M.H. Moradi, "PID Control. New Identification and Design Methods," Springer-Verlag London Limited, 2005. – p. 543.
- [2] Д.В. Баландин, М.М. Коган, "Синтез оптимальных линейных матричных законов управления на основе линейных матричных неравенств," *Автоматика и телемеханика*, № 3, с. 3–18, 2007.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," Philadelphia, PA SIAM, 1994. – 416 p.
- [4] М.М. Комнатська, "Linear Matrix Inequality Based Design of Flight Control System Combined with Fuzzy Tuning," *Вісник НАУ*, №3, с. 25-34, 2010
- [5] О.П. Басанец, А.А. Туник "Моделирование процесса наведения по лучу вращающегося твердого тела," *Електроніка та системи управління*, №4, с.147-154, 2010.