

# Синтез импульсных и быстрых управлений в линейных системах при наличии помех

А. Н. Дарьин<sup>1</sup>, Ю. Ю. Минаева<sup>2</sup>

*Аннотация* – In this paper we consider the problem of synthesizing impulse and fast controls under unknown-but-bounded disturbances. Applying the dynamic programming technique we derive variational inequality of Hamilton – Jacobi – Bellman – Isaacs type. The resulting impulse controls are approximated by bounded fast controls.

*Ключевые слова* – Динамическое программирование, Импульсные управления, Быстрые управления.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная управляемая система

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t) + C(t)v(t)dt \quad (1)$$

на отрезке времени  $[t_0, t_1]$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$  – фазовая переменная,  $u \in \mathbb{R}^m$  – управление,  $v \in \mathbb{R}^1$  – неизвестное ограниченное возмущение:  $v(t) \in Q(t)$ ,  $Q(t)$  – компакт. Требуется найти управление в виде синтеза, доставляющего минимум функционалу типа Майера–Больца:

$$J(U(\cdot)) = \text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) \rightarrow \inf \quad (2)$$

Управление выбирается из класса функций ограниченной вариации  $u(\cdot) \in BV[t_0, t_1]$ .

В работе [1] получен основной результат для аналогичной задачи без помехи ( $C(t) \equiv 0$ ) в классе программных управлений: линейная управляемая система может быть переведена из одного состояния в другое при помощи управления  $u(t) = \sum_{i=1}^k u_i \delta(t - \tau_i)$ ,  $\tau_i \in [t_0, t_1]$ , где число импульсов  $k \leq n$ , а векторы  $u_i$  отвечают за интенсивность и направление удара в моменты времени  $\tau_i$ . В статье [2] получен синтез импульсных управлений для линейной задачи управления без помех.

## II. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей работе при помощи модифицированного метода динамического программирования (согласно схеме, предложенной в [3]) для задачи (1)–(2) определена минимаксная функция цены

$$V^-(t_0, x_0) = \min_{U(\cdot)} \max_{v(\cdot)} [\text{Var } U(\cdot) + \varphi(x(t_1 + 0)) | x(t_0) = x_0].$$

Вводится расширенное обозначение

$$V^-(t_0, x_0) = V^-(t_0, x_0; t_1, \varphi(\cdot))$$

и функция цены с коррекциями на разбиении  $T = \{\tau_0, \dots, \tau_N\}$ ,  $t_0 = \tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$ :

$$V_T^-(\tau_0, x) = V^-(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot))$$

$$V_T^-(\tau_{k+1}, x) = V^-(\tau_{k+1}, x; \tau_k, V_T^-(\tau_k, x))$$

$$V^-(t, x) = \inf_T V_T^-(t, x)$$

Показано, что функция цены с коррекциями  $V^-(t, x)$  удовлетворяет принципу оптимальности в форме полугруппового свойства и является решением вариационного неравенства типа Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. Предложен способ определения управления в виде синтеза.

В случае одномерного пространства состояний ( $x \in \mathbb{R}^1$ ) существует явное представление для функции цены, и с помощью вариационного неравенства можно построить синтез управления в конкретных численных примерах. Для многомерного пространства, если не удастся найти явное выражение для функции цены, задачу можно решать приближенно, используя аппроксимации функции цены.

## III. БЫСТРЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

Импульсные управления позволяют переводить систему в заданное состояние за нулевое время, но являются математическими абстракциями. В реальных процессах требуется использование ограниченных управлений (хотя такие управления могут быть достаточно большими по модулю). Для этого вводятся быстрые управления – ограниченные аппроксимации импульсных управлений. В настоящей работе предложен способ построения синтеза управления при помощи быстрых управлений с минимальным модулем.

## СПИСОК ССЫЛОК

- [1] Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.
- [2] Дарьин А. Н., Куржанский А. Б., Селезнёв А. В. Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 11. С. 1491–1500.
- [3] Куржанский А. Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды МИАН. 1999. № 224. С. 234–248.
- [4] Kurzhanski A. B., Daryin A. N. Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32, N 2. P. 213–227.

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Москва, 119991, РОССИЯ, E-mail: daryin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Москва, 119991, РОССИЯ, E-mail: yminaeva@gmail.com