

Подходы к решению задачи матричного устойчивого пополнения

М.В. Хлебников¹, П.С. Щербаков¹

Аннотация – This paper discusses randomized approaches to the Hurwitz matrix completion problem. Results of numerical simulations are presented.

Ключевые слова – Линейные системы, матричное пополнение.

I. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В энергетике, управлении космическими аппаратами, электрическими сетями и другими сложными техническими системами часто приходится сталкиваться с необходимостью решения т.н. задачи матричного пополнения (в англоязычной литературе – matrix completion problem) [1].

В данной работе задача матричного пополнения формализована следующим образом. Имеется квадратная матрица N -го порядка (N может достигать десятков и даже сотен), некоторое число элементов $q_i, i = 1, \dots, m$ в которой являются свободными – мы можем самостоятельно их назначать. Нужно выбрать их значения таким образом, чтобы придать матрице возможно большую степень устойчивости.

Эта задача относится к числу трудных [2], и в общем случае не имеет полного решения. Это объясняется тем, что целевая функция

$$f(A) = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$$

в задаче оптимизации степени устойчивости матрицы A является «плохой» с точки зрения применения методов оптимизации – невыпуклой и недифференцируемой.

Для решения этой задачи можно использовать стандартные методы локальной безусловной оптимизации нулевого порядка. Однако можно предложить некоторые новые подходы к ее решению, имеющие невысокую вычислительную сложность.

II. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ

В докладе показывается, что в случае, когда свободные элементы образуют полные строки в матрице, задача сводится к построению управления в виде статической линейной обратной связи по состоянию и, тем самым, допускает исчерпывающее решение [2].

В случае более сложного расположения элементов q_i общего решения задача уже не имеет. Если они находятся на пересечении некоторого числа ее строк и столбцов, задача эквивалентна задаче построения управления в виде

статической линейной обратной связи по выходу, которая, как известно, также сложна.

В докладе рассматриваются два подхода к решению рассматриваемой задачи, основанные на рандомизированных методах.

Первый из них является реализацией метода случайного поиска, а другой реализует метод Hit-and-Run [3] с одномерной глобальной оптимизацией следующим образом. Значения параметров q_i ищутся во множестве Ω , образованном ограничениями на их величины (например, $|q_i| \leq Q_i$). Пусть $q = (q_1, \dots, q_m) \in \Omega$, а произвольный вектор Δ задает некоторое направление в Ω . Определив отрезок $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, на котором $q + \lambda \Delta \in \Omega$, строим одномерную сетку по $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ и находим значение $q + \hat{\lambda} \Delta$, обеспечивающее наибольшую степень устойчивости матрицы; оно и будет задавать начальную точку для следующей итерации.

Как показывают численные эксперименты, в которых предложенные методы сравнивались со стандартным simplex search method, реализуемым процедурой fminsearch в среде МАТЛАВ, последний гораздо сильнее зависит от начальных условий. При последовательных запусках он дает сильно отличающиеся результаты.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется, что к задаче матричного пополнения могут быть применены рандомизированные подходы, основанные и на других идеях, в частности – на построении квадратичных функций Ляпунова.

СПИСОК ССЫЛОК

- [1] Hogben L. and Wangsness A., "Matrix Completion Problems. Handbook of Linear Algebra", CRC Press, Boca Raton, 2006.
- [2] Поляк Б.Т., Щербаков П.С., "Робастная устойчивость и управление", М.: Наука, 2002.
- [3] Поляк Б.Т., Щербаков П.С., "Рандомизированный метод решения задач полуопределенного программирования" // "Стохастическая оптимизация в информатике" / Под ред. О.Н. Граничина, СПбГУ, 2006, С. 38–70.

¹ Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, РОССИЯ, E-mail: khlebnik@ipu.ru, sherba@ipu.ru.