УДК 517.977

Задача управления колебательной системой по результатам измерений

П.А. Точилин[1]

Abstract – **The paper considers the problem of controlling an oscillating system with disturbances in the dynamics. The control uses incomplete information containing uncertainties. A numerical method for solving the problem is described. It is based on the use of the ellipsoidal calculus techniques.**

Ключевые слова – **неопределенность, синтез управлений, эллипсоидальное исчисление.**

Данная работа посвящена решению задачи управления колебательной системой, состоящей из N пружин с грузами, связанных последовательно друг с другом и подвешенных в вертикальной плоскости. Динамика системы при $t \in [t_0, t_1]$ моделируется при помощи следующих $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{N+i}, 1 \le i \le N \\ m_1 \dot{x}_{N+1} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + v_1 \\ m_i \dot{x}_{N+i} = k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - k_i(x_i - x_{i-1}) + v_i, 1 < i < N \\ m_N \dot{x}_{2N} = -k_N(x_N - x_{N-1}) + v_N + u \end{cases}$$

Через x_j обозначено смещение j-ого груза относительно положения равновесия; $v = (v_1, ..., v_N)'$ — помеха (неопределенность), в которую могут быть включены погрешности линеаризации, а также различные внешние факторы, влияющие на функционирование системы. Величина u — это скалярное управление, величиной которого можно распоряжаться. Управление (внешняя сила) приложено к одной из пружин. На величины помех и управления наложены геометрические (поточечные) ограничения: $v_1^2 + ... + v_N^2 \le \nu^2$, $|u| \le \mu$. Массы грузов m_j и коэффициенты жесткости пружин k_j считаются известными. Сила тяжести входит в систему дифференциальных уравнений неявным образом, определяя длины пружин в состоянии покоя. Рассматриваются также варианты системы, в которых помехи присутствуют не во всех последних N дифференциальных уравнениях.

Кроме уравнений динамики рассматриваются уравнения наблюдения:

$$y_j = x_{i_j} + \xi_j, j = 1, ..., K$$

Здесь $y = (y_1, ..., y_K)', K \le N$ — вектор наблюдения, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_K)'$ — помеха, возникающая в процессе наблюдения ($\xi_1^2 + ... + \xi_K^2 \le \eta^2$).

В работе рассматриваются различные варианты уравнений наблюдения:

1) наблюдается положение только одной из пружин;

2) наблюдаются положения сразу нескольких (или всех) пружин.

Основная задача состоит в построении управления системой, синтезируемого на основании информации, доступной к текущему моменту времени t, т.е. значений функции $y(\tau), \tau \in [t_0, t]$. Управление должно быть выбрано таким образом, чтобы гарантированно (для любых априори неизвестных помех) перевести траекторию системы в наименьшую окрестность заданного целевого множества M в конечный момент времени t_1. Множество M является эллипсоидом в пространстве R^{2N}.

Для решения поставленной задачи применяется общая схема, описанная в [4]. Используется многозначная позиция системы $(t, X(t))$, где $X(t)$ — это информационное множество к моменту времени t. Оно содержит все возможные позиции системы в заданный момент времени, совместимые с полученными измерениями $y(\tau), \tau \in [t_0, t]$. Задача построения синтеза управлений разбивается на подзадачи:

1) Необходимо построить множества (трубку) разрешимости $W(t)$ для системы с неопределенностью в уравнениях динамики, при полной информации относительно ее позиции (т.е. без уравнений наблюдения). Для приближенного построения указанных множеств используются методы эллипсоидального исчисления [5]. Множество разрешимости представляется в виде объединения семейства внутренних эллипсоидальных аппроксимаций.

2) На основании известных функций $u(\tau), y(\tau), \tau \in [t_0, t]$ необходимо построить информационное множество $X(t)$ в текущий момент времени t. Для решения этой задачи используются эволюционные уравнения [3] для информационных множеств, а также методы эллипсоидальной аппроксимации сумм эллипсоидов и их пересечений. Информационное множество представляется в виде пересечения семейства внешних эллипсоидальных оценок.

[1] МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК; 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 2-ой учебный корпус, E-mail: paultoch@mail.ru

3) Для подсчитанных множества разрешимости $W(t)$ и информационного множества $X(t)$ решается задача «прицеливания» $X(t+dt)$ на $W(t+dt)$ для малой величины $dt > 0$:

$$h_+(X(t+dt), W(t+dt)) \to \min_{u(\cdot)}$$

Здесь $h_+(X,Y) = \min\{r \geq 0 : X \subseteq Y + B_r(0)\}$ – хаусдорфова полуметрика, минимизация производится по кусочно-непрерывным программным управлениям $u(\tau), \tau \in [t, t+dt]$, удовлетворяющим геометрическим ограничениям. При использовании эллипсоидальных аппроксимаций численно решается задача «прицеливания» одним эллипсоидом E_1 на другой E_2

$$\rho(l \mid E_1) - \rho(l \mid E_2) \to \max_l, l \in R^{2N}.$$

Здесь $\rho(l \mid E)$ - опорная функция к эллипсоиду E в направлении, задаваемом вектором l. Указанная задача может быть сведена к решению скалярного нелинейного алгебраического уравнения. На основании найденного максимизатора l может быть определено управление, максимально сближающее информационное множество со множеством разрешимости.

Минимальная окрестность целевого множества, в которую можно гарантированно перевести траекторию системы (информационное множество), определяется как максимальное расстояние от информационных множеств до множеств разрешимости в различные моменты времени.

В работе реализованы численные методы для решения трех указанных подзадач, написана программа, позволяющая приближенно строить трубку разрешимости, оценивать информационные множества и синтезировать управление системой. Использование эллипсоидальных аппроксимаций позволяет численно решать задачу для системы большой размерности.

Было проведено моделирование работы предложенных численных алгоритмов для различных параметров системы и различных видов неопределенностей, для двух и трех пружин. При этом допускается использование как детерминированных помех, так и стохастических.

Для визуализации результатов моделирования используются проекции информационных множеств на плоскости, задаваемые различными парами координатных осей.

В работе исследована зависимость информационных трубок от величин геометрических ограничений на помехи, а также от функциональных свойств помех. В частности, рассмотрены 1) помехи наблюдения, которые являются случайными и распределенными равномерно по границе области их допустимых значений; 2) помехи наблюдения, лежащие на границе области допустимых значений и являющиеся детерминированными (заданы явными соотношениями); 3) нулевые помехи наблюдения. В последнем случае, когда реально помех наблюдения нет, но информационное множество рассчитывается с учетом возможной неопределенности, является самым нежелательным, т.к. при этом информационное множество является максимальным. Случайная природа помехи наблюдения сказывается на скачкообразном изменении информационных множеств со временем. В случае же детерминированных (или нулевых) помех информационные множества изменяются непрерывно (в смысле метрики Хаусдорфа).

В работе изучен вопрос наблюдаемости системы при различных уравнениях наблюдения. Исследовано качественное поведение информационных множеств (многозначных позиций системы) при различных ограничениях на помехи и управляющий параметр, при разных вариантах уравнений наблюдения, а также при управлении различными пружинами.

Список ссылок

[1] Куржанский А.Б., "Управление и наблюдение в условиях неопределенности", М.: Наука, 1977.

[2] Востриков И.В., Дарьин А.Н., Куржанский А.Б., "Об успокоении многозвенной колебательной системы в условиях неопределенных возмущений", Дифференциальные уравнения, 2006. Т. 42. №11. с. 1452 — 1463.

[3] Куржанский А.Б., Никонов О.И., "Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления", Доклады РАН, 1993. Т. 333. №4. с. 578-581.

[4] Kurzhanski A.B., Varaiya P., "On the problem of output feedback control under set-membership uncertainty", 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Bologna, Italy, 2010.

[5] Kurzhanski A.B., Varaiya P., "Reachability analysis for uncertain systems — the ellipsoidal technique", Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems, ser. B, v. 9, №3, 2002, pp. 347-367.