

# $l_1$ -Подходы к построению стабилизирующих регуляторов низкого порядка

Б.Т. Поляк<sup>1</sup>, М.В. Хлебников<sup>1</sup>, П.С. Щербаков<sup>1</sup>

**Аннотация** – This paper presents  $l_1$ -based approaches to the design of low-order controllers for linear systems specified in the state space. The goal is to minimize the number of required states (outputs).

**Ключевые слова** – Линейные системы,  $l_1$ -оптимизация.

## I. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В различных технических задачах часто требуется построить управление по возможно малому числу состояний или выходов системы управления. Соответствующий регулятор будем называть регулятором низкого порядка.

Некоторые подходы к решению этой, в общем случае трудной задачи, дают методы, основанные на  $l_1$ -оптимизации и приводящие к совершенно новым постановкам задач управления. В отличие от разнообразных рандомизированных методов, они имеют низкую вычислительную сложность.

Рассмотрим линейную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с состоянием  $x \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $y \in \mathbb{R}^l$  и управлением  $u \in \mathbb{R}^p$ ; пара  $(A, B)$  предполагается управляемой.

Будем искать стабилизирующее управление в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx \quad (2)$$

или по выходу

$$u = Ky, \quad (3)$$

с возможно большим числом нулевых столбцов в матрице регулятора  $K$ . При этом мы получим управление, использующее малое число состояний (или выходов) системы.

## II. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ

Методы  $l_1$ -оптимизации [1,2] основываются на том, что при минимизации  $l_1$ -нормы вектора можно ожидать получения малого числа ненулевых компонент. Этот подход может быть обобщен на матричный случай путем введения т.н.  $c_1$ -нормы матрицы  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ :

$$\|M\|_{c_1} = \sum_{j=1}^m \max_{1 \leq i \leq n} |m_{ij}|. \quad (4)$$

Тогда при минимизации  $c_1$ -нормы можно ожидать, что у

матрицы  $M$  некоторые столбцы будут нулевыми.

Далее будем полагать, что в системе (1)  $B=I$ , т.е. управление имеет ту же размерность, что и вектор фазового состояния системы.

Следуя [3], в случае управления по состоянию (2), ляпуновский подход приводит к линейному матричному неравенству

$$A^T Q + QA + Y + Y^T \leq 0, \quad Q > 0. \quad (5)$$

**Утверждение.** Пусть  $\hat{Y}, \hat{Q}$  – решение задачи минимизации  $\|Y\|_{c_1}$  при ограничениях (5). Тогда в матрице  $\hat{Y}$  будет некоторое количество нулевых столбцов и столько же нулевых столбцов будет в матрице регулятора по состоянию  $\hat{K} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y}$  системы (1).

В результате, построенное управление будет использовать малое число состояний системы.

Этот же подход может быть распространен и на случай управления по выходу (3). Иными словами, имея заданную структуру выхода (матрицу  $C$ ), мы выделяем лишь некоторые из выходов, которых тем не менее достаточно для управления системой.

## III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подходы, основанные на идеях  $l_1$ -оптимизации, могут быть распространены и на иные постановки задач. Например, в системах управления электрическими сетями, космическими аппаратами и др. часто известен весь вектор состояния, но при этом управление и сам объект пространственно сильно разделены, и нужно минимизировать объем передаваемой между ними информации. При этом можно считать, что мы сами конструируем матрицу линейного выхода системы так, чтобы он был маломерным.

## СПИСОК ССЫЛОК

- [1] Donoho D.L., "Compressed sensing", in *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, vol. 52, pp. 1289–1303.
- [2] Граничин О.Н., Павленко Д.В., "Рандомизация получения данных и  $l_1$ -оптимизация (опознание со сжатием)" // *Автоматика и телемеханика*, 2010, №11, С. 3–28.
- [3] Поляк Б.Т., Щербаков П.С., "Робастная устойчивость и управление", М.: Наука, 2002.

<sup>1</sup> Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, РОССИЯ, E-mail: [boris@ipu.ru](mailto:boris@ipu.ru), [khlebnik@ipu.ru](mailto:khlebnik@ipu.ru), [sherba@ipu.ru](mailto:sherba@ipu.ru).