УДК 519.2

Локально-оптимальное управление распределенными сетями поставок

Ю.И. Дорофеев[1], А.А. Никульченко[1]

Abstract – **The dynamic network model of production-storage-distribution system with non-stochastic uncertain demands is considered. To verify conditions for existence of optimal control strategy, that guarantees full demand satisfaction, computational algorithm is introduced. Using discrete-event models with delays locally-optimal control strategy taking into account constraints on state vectors and control vectors is offered.**

Ключевые слова – **Сеть поставок, Управление запасами, Локально-оптимальное управление, Прогнозирующее управление с моделью.**

I. Введение

Рассматривается задача управления сетью поставок, представляющей собой совокупность взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распределение некоторого набора единиц продукции.

Для синтеза стратегии управления запасами в системах рассматриваемого класса в условиях неопределенности внешнего спроса целесообразно испорльзовать метод локально-оптимального управления, которое представляет частный случай прогнозирующего управления (Model Predictive Control) [1].

II. Построение математической модели

Для графического представления распределенных сетей поставок используется ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам сети и предполагаются однономенклатурными. Дуги графа описывают управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, возможно перерабатывая их, и обеспечивают поставки сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения.

Существуют различные способы описания динамических сетевых моделей [2,3]. В настоящей работе для математического описания сетей поставок используются «дискретно-событийные» модели. Пусть сеть содержит N узлов. Предполагается, что значения времени выполнения заказа в узлах сети $LT_i, i=\overline{1,N}$ и времени транспортировки ресурсов между узлами сети $T_{j,i}$, $i,j=\overline{1,N}$, $i \neq j$ являются известными величинами, кратными периоду дискретизации Δt. Поскольку пополнение запасов всегда происходит с некоторым запаздыванием относительно момента выдачи требования, то для построения математической модели сети поставок необходимо определить значения периодов запаздывания управляемых потоков между узлами сети $\Lambda_{j,i} = T_{j,i} + LT_i$ и найти максимальное значение:

$$\Lambda_{max} = \max_i \Lambda_i^{max}, \quad \text{где} \quad \Lambda_i^{max} = \max_j \Lambda_{j,i}. \qquad (1)$$

Тогда динамика сети поставок с запаздываниями управляемых потоков описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_{max}} B_t u(k-t) + Ed(k), \qquad (2)$$

где $x(k) \in R^N$ – вектор состояний системы, i-я компонента которого задает уровень наличного запаса на i-м узле сети в момента времени k; $u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, компоненты которого представляют управляемые потоки в момент времени k; $d(k) \in R^q$ – вектор спроса, компоненты которого описывают неуправляемые потоки; структура сети определяется структурой матриц $B_t \in R^{N\times q}$, $t=\overline{0,\Lambda_{max}}$, $E \in R^{N\times m}$.

С учетом физического смысла переменных модели и структурных свойств сети, введем в рассмотрение следующий набор ограничений:

$$\begin{aligned} x(k) &\in X = \{x \in R^N \mid 0 \le x \le x^+\}, \\ u(k) &\in U = \{u \in R^m \mid 0 \le u \le u^+\}, \\ d(k) &\in D = \{d \in R^q \mid d^- \le d \le d^+\}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где векторы x^+, u^+, d^- и d^+ считаются заданными. Предположение о том, что нижние границы x и u равны нулю, не является ограничением общности.

Для получения эквивалентной модели сети поставок без запаздываний используется метод расширения пространства состояний. В результате уравнение «расширенной» модели сети будет иметь вид:

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + Fu(k) + Gd(k), \qquad (4)$$

где матрицы A, F, G имеют соответствующую блочную структуру, а вектор состояний строится следующим образом:

$$\xi(k) = \left[x(k)^T,\ \ u(k-1)^T,\ \ u(k-2)^T,\ \ \ldots,\ \ u(k-\Lambda_{max})^T\right]^T. \qquad (5)$$

Динамика системы (4) эквивалентна динамике системы, вектор состояний которой имеет вид:

$$\hat{\xi}(k) = \left[z(k)^T,\ \ u(k-1)^T,\ \ u(k-2)^T,\ \ \ldots,\ \ u(k-\Lambda_{max})^T\right]^T, \qquad (6)$$

[1] Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, УКРАИНА, E-mail: yidorofeev@yandex.ua, artem_nikulchenko@dbbest.com

где переменные $z(k)$ называют фиктивными уровнями запаса и определяют как сумму уровня запаса ресурсов, находящихся в хранилищах, и ресурсов, которые находятся в процессе транспортировки между узлами сети:

$$z(k) = x(k) + \sum_{t=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_t u(k-t), \quad \text{где} \quad \hat{B}_i = \sum_{t=i}^{\Lambda_{max}} B_t. \qquad (7)$$

Полученная система с вектором состояний (6) допускает декомпозицию на две подсистемы. Первая представляет собой «мгновенную» модель сети поставок, так как у нее все задержки равны нулю, и описывается уравнением:

$$z(k+1) = z(k) + Bu(k) + Ed(k), \quad \text{где} \quad B = \sum_{t=0}^{\Lambda_{max}} B_t. \qquad (8)$$

Переменными состояния второй подсистемы являются запаздывающие управляющие воздействия $u(k-t)$, $t = \overline{1, \Lambda_{max}}$ «расширенной» модели сети. При этом вторая подсистема является асимптотически устойчивой, поскольку ее матрица состояний является нильпотентной. Поэтому для анализа и синтеза стратегии управления запасами используется «мгновенная» модель распределенной сети поставок (8).

III. Синтез стратегии управления запасами

Задача синтеза системы управления запасами состоит в отыскании стратегии управления, которая определяет управляемые потоки сети в соответствии с поставленной целью управления и с учетом ограничений (3).

Важнейшим вопросом, на который необходимо дать ответ в процессе анализа, является следующий: существует ли для построенной модели сети поставок допустимая стратегия управления запасами, которая обеспечивают полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса при заданных ограничениях. В работе [4] доказана теорема, согласно которой допустимая стратегия управления для систем рассматриваемого класса существует, если выполняется условие:

$$ED \subset -BU. \qquad (9)$$

Проверка условия (9) является NP-полной задачей размерности $2^N \cdot 2^m$. Каждый из вариантов рассматриваемой задачи может быть сформулирован как задача линейного программирования, для решения которой предлагается вычислительный алгоритм.

В случае выполнения условия (9) определяются конструктивные ограничения сети поставок для переменных, описывающих фиктивные уровни запасов:

$$z(k) \in Z = \left\{ z \in R^N \,\middle|\, z^- \le z \le z^+ \right\} \qquad (10)$$

Значения вектора нижней границы z^- должны обеспечивать неотрицательность значений вектора наличного уровня запаса $x(k)$. Тогда из (7) следует, что значения граничных векторов определяются следующими соотношениями:

$$z^- = \sum_{i=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_i u^+, \qquad z^+ = x^+ + \sum_{i=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_i u^+. \qquad (11)$$

Если целью управления является полное удовлетворение внешнего спроса без учета стоимости транспортировки ресурсов, то оптимальная стратегия управления может быть получена в каждый момент времени k путем решения системы линейных уравнений с учетом ограничений (3),(10).

Если задача управления модифицируется для учета баланса между стоимостью транспортировки ресурсов и размером штрафов за отложенный спрос, то стратегия управления может быть найдена на основе метода локально-оптимального управления [5] из условия минимизации критерия, задаваемого квадратичной целевой функцией вида:

$$J(k+1) = \left(z(k+1) - z^{opt}\right)^T P\left(z(k+1) - z^{opt}\right) + u(k)^T Ru(k), \quad (12)$$

где z^{opt} – вектор, элементы которого определяют оптимальные уровни запасов; P, R – весовые матрицы соответствующих размерностей.

IV. Заключение

Предложенный подход к построению математической модели распределенной сети поставок с запаздываниями управляемых потоков позволяет получить «расширенную» модель для учета запаздываний материальных потоков и «мгновенную» модель для анализа динамических и структурних свойств сети. Предложен вычислительный алгоритм решения задачи проверки условия существования допустимой стратегии управления. Стратегия управления запасами строится на основе минимизации локального критерия в текущий момент времени. Применение локально-оптимального управления с прогнозом на один такт позволяет строить управление в виде обратной связи по состоянию, а также учитывать ограничения на вектор состояний и вектор управляющих воздействий. Однако при этом возникает необходимость анализа устойчивости синтезированной системы, и, при неоходимости, решения дополнительной задачи ее стабилизации.

Список ссылок

[1] W. Liuping, “Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB”. – Verlag London Limited, 2009.

[2] Лотоцкий В.А., Мандель А.С. Модели и методы управления запасами. – М.: Наука, 1991. 189 с.

[3] C. Daganzo, "A Theory of Supply Chains". – New York: Springer, 2003.

[4] F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich, "Least inventory control for multi-storage systems with non-stochastic unknown input," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 13, pp. 633-645, 1997.

[5] Кельманс Г.К., Позняк А.С., Черницер А.В. "Локально-оптимальное управление системами с неизвестными параметрами", Автоматика и телемеханика, № 10, с. 80-93, 1982.