УДК 681.5:517.935

Асимптотическая стабилизация динамической системы

Дубовик С.А. [1]

Аннотация – **Synthesis of two-tier system of stabilization of the perturbed dynamic system based on the methods of asymptotic analysis.**

Ключевые слова – **Динамическая система, состояние равновесия, экстремаль и функционал действия.**

Пусть необходимо выбрать r- вектор управления $U = U(t)$ объектом, движения которого описываются возмущенным (стохастическим) дифференциальным уравнением для n- вектора состояния $x = x(t)$:

$$\dot{x} = \alpha\ (x, \varepsilon, U) + \varepsilon\ \sigma(x)\ w, \quad x(0) = x_0\ , \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, w – k-вектор возмущений типа «белого шума», α, σ – гладкие матричные функции, а управления $U(t)$ формируются в виде обратных связей по x таким образом, чтобы обеспечить состояние равновесия ξ невозмущенной системы (получается из (1) при $\varepsilon = 0$). В результате замыкания исходной системы (1) таким управлением получим автономную систему

$$\dot{\tilde{x}} = a\,(\tilde{x}, \varepsilon) + \varepsilon\,\sigma(\tilde{x})w\ . \tag{2}$$

Это первый или локальный уровень управления. Соответствующие ему процедуры построения стабилизирующего управления к настоящему времени исследованы в достаточной степени. Одна из наиболее популярных – линейно-квадратический (LQ) регулятор – используется и в настоящей работе.

Для контроля качества и надежности стабилизации (второй, глобальный уровень) введем функционал [1-3], оценивающий интенсивность возмущения v_t :

$$I(v) = I_{0\,t_f}(v) = \varepsilon^{-2} S_{0\,t_f}(v) = \int_0^{t_f} \gamma^2 v^T v\ dt\ ,$$

$$1/\gamma = \varepsilon \tag{3}$$

Какой бы качественной ни была стабилизация первого уровня, она не гарантирует абсолютной надежности - сохраняется возможность больших уклонений от ξ, вплоть до выхода фазовой точки (2) на границу ∂O_ξ области притяжения O_ξ точки ξ. Оказывается, что вероятность $P_д$ такого критического события оценивается с помощью функционала (3): из всех возможных вариантов кризисного развития процесса с подавляющей вероятностью реализуется наименее затратный для возмущения (в интегрально-квадратическом смысле (3)) перевод системы на границу области D. Для точного формулирования результата наряду со стохастическим слабо возмущенным уравнением (2) введем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + \sigma(\varphi)\,v\ ,\ \varphi(0) = x_0 \in D\ , \tag{4}$$

и условие принадлежности траектории φ множеству F_D (реализующему событие $x(t) \in D$, вероятность которого оценивается) из семейства функций, непрерывных на отрезке:

$$\varphi \in F_D \subset X = C_{0\ t_f}\ . \tag{5}$$

Таким образом, получаем задачу (3)-(5) для оценки вероятности события A, связанного с процессом (2). Результатом решения этой задачи является тройка $(\hat{v}, \hat{\varphi}, \hat{t}_f)$, т.е. экстремаль, определяющая минимальное значение (3) $\hat{I} = I_{0\,\hat{t}_f}(\hat{v}) = \varepsilon^{-2}\hat{S}$. Соответствующее оптимальное управление $\hat{v}$ будем называть контруправлением; оно описывает внешние воздействия, наихудшие для управляющей стороны в том смысле, что они наиболее экономным для возмущения способом приводят управляемый процесс к кризису. Эта экстремаль, которую будем называть экстремалью действия (ЭД), и даст искомую оценку вероятности выхода фазовой точки (2) на границу ∂D заданной области D:

$$P_д = e^{-\varepsilon^{-2}\hat{S}}. \tag{6}$$

В частности, область D может совпадать с областью притяжения аттрактора O_ξ, но в этой работе нас будет интересовать и более «узкое» множество, соответствующее выходу объекта на критические значения состояния $D \subset O_\xi$. В работе [1] показано, что для любого $x \in D \subset O_\xi$ с вероятностью, стремящейся к единице при $\varepsilon \to 0$, ЭД $\hat{\varphi}$ попадает в малую окрестность ξ, прежде чем окажется на ∂D. Это значит, что для построения долговременного прогноза задачу (3)-(5) нужно решать при дополнительном условии

$$t_0 \to -\infty, \quad x \to \xi\ . \tag{7}$$

Следуя [1], определим квазипотенциал системы (4) как функцию точки x, равную действию (3), переводящему систему из состояния равновесия ξ в $\varphi = x$:

$$V(\xi, x) = \inf\ \{\ I_{t_0\,t_f}(\varphi) : \varphi \in C_{t_0\,t_f}(R^n), \varphi_{t_0} = \xi, \varphi_{t_f} = x\},$$

а соответствующую ЭД $\hat{\varphi}$ при условии (7) будем называть квазипотенциальной (КЭД). КЭД определяется с точностью до сдвига [1].

[1] Севастопольский нац. техн. университет ул. Университетская, 33,Севастополь, 99053, УКРАИНА, E-mail: duboviksa@gmail.com

В данной работе рассматривается случай «не очень больших уклонений», особенность которого в том, что существенными являются даже небольшие отклонения от номинальной линии движения. Это позволяет в качестве уравнения (2) принять линеаризованное уравнение в отклонениях от номинала. Уравнение (4) тогда имеет вид ($a(x) = Ax, \sigma(x) = \sigma$):

$$\dot{\varphi} = A\varphi + \sigma v \qquad (8)$$

Для сопряженных переменных получим начальную задачу

$$\dot{\psi} = -A^T\psi\ ,\ \psi(t_f) = \psi_f\ . \qquad (9)$$

Оптимальное контруправление, выводящее на критическое множество, вычисляется по сопряженным переменным:

$$v = \sigma^T\psi\ . \qquad (10)$$

Подставляя решения начальной задачи (9) в (10) и (8), получим для ЭД $\varphi(t)$

$$\dot{\varphi} = A\varphi + \sigma\sigma^T \exp\{A^T(t_f - t)\}\psi_f\ ,\ \varphi(t_f) = x_f\ .$$

Предполагая гурвицевость матрицы A (локальный уровень стабилизации) имеем отсюда:

$$\varphi(t) = \exp\{A(t - t_f)\}x_f + J(t)\psi_f\ , \qquad (11)$$

где

$$J(t) = \int_{t_f}^{t} \exp\{A(t-\tau)\}\sigma\sigma^T \exp\{A^T(t_f - \tau)\}d\tau =$$

$$= D\exp\{A^T(t_f - t)\} - \exp\{A(t - t_f)\}D\ ,$$

а симметричная положительно определенная матрица D удовлетворяет уравнению Ляпунова:

$$\sigma\sigma^T = -AD - DA^T\ . \qquad (12)$$

Обратимся к (11) при $t = t_0$:

$$\varphi(t_0) = \exp\{A(t_0 - t_f)\}\ (x_f - D\psi_f) +$$

$$+ D\exp\{A^T(t_f - t_0)\}\psi_f\ . \qquad (13)$$

Функционал действия на отрезке $t_0 \le t \le t_f$ равен (с учетом (8),(10)):

$$I_{t_0 t_f}(v) =$$

$$= \psi_f^T[D - \exp\{A(t_f - t_0)\}D\ \exp\{A^T(t_f - t_0)\}\ ]\psi_f\ . \qquad (14)$$

Имея в виду возможность долговременного прогноза, устремим в (13),(14) $T = t_f - t_0$ к бесконечности или $t_0 \to -\infty$. Для любых фиксированных t_0, $t_f > t_0$ и гурвицевой.

А соотношение (13) определяет взаимно однозначное соответствие: $\varphi(t_0) \leftrightarrow \psi_f$, в котором правая часть ограничена условием (9) (условие трансверсальности для (5)). Это значит, что для аттрактора ξ может не существовать подходящего значения ψ_f, поэтому предел $\varphi_{-\infty} = \lim\limits_{t_0 \to -\infty} \varphi(t_0)$ существует тогда и только тогда, когда уравнение

$$x_f - D\psi_f = 0$$

имеет решение, удовлетворяющее граничному условию (9). В противном случае к аттрактору можно приблизиться, выбирая ψ_f следующим образом

$$\|\phi(t_0)\| \to \inf_{\psi_f \in M_f}\ , \qquad (15)$$

где

$$\phi(t_0) = \exp\{A(t_0 - t_f)\}\ (x_f - D\psi_f)\ .$$

Определим также проекцию на КЭД текущего состояния x как такое значение $\tilde{\varphi}_* = \tilde{\varphi}_*(t)$ функции (13), при котором обеспечивается $\inf\limits_{t \in (-\infty, t_f]} \|x - \tilde{\varphi}(t)\|^2$. Вычисляя проекцию на КЭД текущего состояния системы (2) $\tilde{x}(t)$, причем аргумент $\tilde{\varphi}_*(t)$ при этом совмещается с текущим, т.к. КЭД определяется с точностью до сдвига, определяем соответствующее моменту $t_0 = t$ значение функционала действия по формуле (14) и оценку вероятности $P_д = P_д(t)$ по формуле (6).

ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Вентцель А.Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин.– М.: Наука, 1979.– 424 с.

[2] Дубовик С.А. Алгоритм прогноза критического состояния динамической системы / С.А. Дубовик // Динамические системы, 1998. – Вып.14. – С. 40-44.

[3] Нечаев Ю.И., Дубовик С.А. Анализ устойчивости нелинейной стохастической модели динамики корабля на волнении с помощью функционала действия // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. –С.101-103.