**УДК 519.85**

# Застосування прямого методу відсікання для задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях

О. О. Ємець[1], Є. М. Ємець[2], Ю. Ф. Олексійчук[3]

*Анотація* – **The direct method of cutting off for solving combinatorial optimization problems on arrangements is proposed in this abstracts. This method allows to receive the admissible decision on each step.**

*Ключові слова* – **Прямий метод відсікання, розміщення, комбінаторна оптимізація .**

## I. Вступ

Задачі комбінаторної оптимізації виникають при розв'язуванні багатьох практичних задач.[1-6]

Точні методи розв'язування комбінаторних та дискретних задач оптимізації можна умовно розділити на дві групи: методи відсікання та комбінаторні. Головна ідея більшості методів відсікання полягає у тому, що розв'язується деяка релаксована задача, що утворюється з вихідної відкиданням частини обмежень, а потім знаходиться розв'язок вихідної задачі.

Для методів комбінаторного відсікання однією з проблем є проблема використання опису комбінаторних многогранників у вигляді лінійних обмежень, кількість яких зростає експоненціально з ростом кількості елементів комбінаторних множин. Цю проблему можна вирішити, якщо будувати лише частину комбінаторних обмежень, як, наприклад, у методі послідовного приєднання обмежень [1], або не будувати їх взагалі.

В доповіді розглядається прямий метод відсікання для комбінаторних задач оптимізації на розміщеннях, в якому не будується лінійна оболонка комбінаторної множини розміщень, що суттєво зменшує розмірність симплекс-таблиць. Цей метод використовує ідеї прямого алгоритму цілочислового програмування [7].

## II. Множина полірозміщень

Нехай $J_n$ — множина $n$ перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1,2,\dots,n\}$. Під мультимножиною

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\} \tag{1}$$

будемо розуміти сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові (нерозрізнимі). [1]

Будь-яку мультимножину $A$ можна представити її основою $S(A)$, тобто множиною всіх її різних елементів, та первинною специфікацією — списком кратностей елементів основи мультимножини.

Розглянемо $k$-вибірку з мультимножини $G$ такого вигляду:

$$g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}), \tag{2}$$

де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_\eta$ $\forall j, t \in J_k$.

Множину $A^k_{\eta n}(G)$, елементами якої є різні упорядковані $k$-вибірки вигляду (1) з мультимножини $G$ називають [1, 4] евклідовою комбінаторною множиною на розміщеннях.

Відображення

$$\varphi : A^k_{\eta n} \to E_f \subset R^k \tag{3}$$

називають зануренням $A^k_{\eta n}$ в арифметичний евклідовий простір, якщо між $A^k_{\eta n}$ та $E_\varphi$ існує взаємно однозначна відповідність, встановлена правилом: для

$$\begin{gathered} g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}) \in A^k_{\eta n}, \\ x = \varphi(g), \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E_\varphi \end{gathered} \tag{4}$$

маємо $x_j = g_j$ $\forall j \in J_k$.

Позначимо занурену евклідову комбінаторну множину полірозміщень $E^k_{\eta n}(G)$ або просто $E^k_{\eta n}$.

## III. Постановка задачі

Знайти упорядковану пару $\langle x^*, f(x^*) \rangle$:

$$\begin{gathered} f^* = f(x^*) = \max_{x \in E^k_{\eta n}} f(x), \\ x^* = \arg\max_{x \in E^k_{\eta n}} f(x) \end{gathered} \tag{5}$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le a_{i0}, \ (i = 1,2,\dots,t), \tag{6}$$

де $E^k_{\eta n}$ — евклідова множина розміщень [1, 4], елементами якої є цілі числа, $f(x)$ — лінійна функція.

## IV. Алгоритм розв'язання

**Крок 0.** Побудуємо симплекс-таблицю відповідної задачі лінійного програмування (без урахування комбінаторних умов). До симплекс-таблиці приєднується рядок (далі $L$-рядок), який відповідає обмеженню, що виражає верхню границю небазисних змінних

$$x_L + \sum_{j \in J} x_j = a_{L0}, \tag{7}$$

де $J$ — множина небазисних змінних,

[1] Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, 36014, УКРАЇНА, E-mail: contacts@informatics.org.ua

[2] Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, 36014, УКРАЇНА, E-mail: yemetsli@mail.ru

[3] Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, 36014, УКРАЇНА, E-mail: olexijchuk@gmail.com

$$a_{L0} = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \,, \tag{8}$$

де $\bar{x}_i$ — максимально можливе або більше, ніж максимально можливе, значення змінної $x_i$, за умови задачі (5)-(6).

**Крок 1.** Перевірити умову оптимальності для розв'язку задачі лінійного програмування (ЗЛП): якщо оцінки $x_{0j} \geq 0 \quad \forall j$, то розв'язок оптимальний, зупинка; інакше — перехід до кроку 2.

**Крок 2.** Вибрати напрямний стовпець з номером $\sigma$, що задовольняє умовам $a_{L\sigma} > 0$ і $r_\sigma \prec r_j$ для всіх $j \neq \sigma$, $j \in J$ при $a_{L\sigma} > 0$, де

$$r_j = \left( \frac{a_{0j}}{a_{Lj}}, \frac{a_{1j}}{a_{Lj}}, \ldots, \frac{a_{nj}}{a_{Lj}} \right). \tag{9}$$

**Крок 3.** Вибрати номер твірного рядка $v$, за яким буде будуватися відсікання, із множини

$$V(s) = \left\{ i \middle| 0 \leq \left[ \frac{a_{io}}{a_{i\sigma}} \right] \leq \Theta_\sigma \right\}, \tag{10}$$

де

$$\Theta_\sigma = \min_{a_{i\sigma}>0} \frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}, \tag{11}$$

$[a]$ — ціла частина $a$, за наступними правилами:

А) Нехай $V_t(\sigma)$ — множина $V(\sigma)$, що відповідає $t$-й симплекс-таблиці. Якщо $V_t(\sigma)$ містить більше одного елемента:

$$V_t(\sigma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \tag{12}$$

то вибираємо рядок $v_\alpha$, що в послідовності $V_1(\sigma)$, $V_2(\sigma)$, …, $V_t(\sigma)$ з'явився раніше (не пізніше) інших $v_i \in V_t(\sigma)$ і зберігався до $V_t(\sigma)$. Перейти до Б)

Б) Послідовно вибирати рядок $v$, взятий в А), поки $v \in V(\sigma)$. Якщо $v \notin V(\sigma)$, перейти до А).

**Крок 4.** Додати в симплекс-таблицю відсікання

$$x_{m+1} = \left[ \frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right] + \sum_{j \in J} \left[ \frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right] \left( -x_j \right) \tag{13}$$

і перевірити, чи задовольняє наступний допустимий розв'язок нової ЗЛП комбінаторним обмеженням ($x \in E_{\eta n}^{k}$). Якщо так — перейти до кроку 7. Інакше — покласти $d = 1$, перейти до кроку 5.

**Крок 5.** Замінити відсікання (13) наступним

$$x_{m+1} = \left( \left[ \frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right] - d \right) + \sum_{j \in J} \left( \left[ \frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right] - d + q \right) \left( -x_j \right), \tag{14}$$

де $q = 1$, якщо

$$\left\{ \frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right\} < \left\{ \frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right\}, \tag{15}$$

інакше $q = 0$. Перейти до кроку 6.

**Крок 6.** Перевірити, чи задовольняє наступний допустимий розв'язок ЗЛП комбінаторним обмеженням. Якщо так — перейти до кроку 7. Інакше — збільшити $d$ на одиницю, перейти до кроку 5.

**Крок 7.** Провести симплекс-перетворення, де розв'язувальним стовпцем є стовпець з номером $\sigma$, а розв'язувальним рядком — додане відсікання.

**Крок 8.** Викреслити рядок, що відповідає введеному відсіканню із симплекс-таблиці. Перейти до кроку 1.

## V. Висновок

В даній роботі запропонований прямий метод відсікання для розв'язування умовних комбінаторних задач оптимізації на розміщеннях. Перевагою методу є те, що на кожному кроці ми мали допустимий розв'язок вихідної задачі (5)-(6).

Напрямком подальших досліджень може бути отримання теоретичної оцінки складності алгоритму та його модифікація для інших класів комбінаторних задач.

## Список посилань


[1] Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.

[2] Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.

[3] Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.

[4] Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.

[5] Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — К., Наук. думка, 2005. — 117 с.

[6] Ємець О. О., Роскладка О. В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.

[7] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 519 с.