УДК 519.718

Робастные свойства систем с параметрической неопределенностью смешанного вида

А.А. Кабанов[1]

Abstract – **The mixed approach to description of system uncertainty based on interval and singularly perturbed presentations is considered. The algorithm of evaluation of robust properties of the systems is offered with the mixed uncertainty.**

Key words – **robustness, singular perturbation, interval uncertainty, stability radius, hardness estimate.**

I. Введение

При решении реальных задач конструкторы систем управления должны, в сущности, решать задачу управления не одним объектом, а некоторым классом объектов, так как истинные значения параметров объекта известны лишь с той или иной степенью приближения. Кроме того некоторые параметры, например, такие, как масса, момент инерции могут изменяться в процессе функционирования, поэтому при построении системы управления должны выбираться такие законы управления, которые бы обеспечивали некоторые гарантированные результаты (устойчивость, качество). При этом сама система управления, в первую очередь, должна удовлетворять требованию грубости (робастности), т.е. функционировать надлежащим образом при наличии неопределенности в управляемом процессе.

Современная теория робастного управления основана на параметрическом представлении неопределенности в виде интервального или аффинного семейства полиномов или матриц. В основе такого подхода лежит теорема В.Л. Харитонова об асимптотической устойчивости интервального семейства полиномов [1]. В работе [2] используется другой параметрический подход, где в роли неопределенности выступает параметр, повышающий порядок системы. Асимптотическая устойчивость такого семейства систем гарантирует теорема Климушева-Красовского – фундаментальный результат теории сингулярных возмущений [3]. Сингулярно возмущенный подход можно использовать и для анализа робастных свойств дискретных систем, руководствуясь дискретным аналогом теоремы Климушева-Красовского [4]. И с этим связано преимущество такого подхода, поскольку теорема Харитонова применима в основном к многочленам Гурвица, а в дискретном случае она справедлива лишь для многочленов второй и третьей степени [1,5].

В настоящей работе предлагается смешанный способ описания неопределенности, основанный как на интервальном, так и на сингулярно возмущенном подходах.

II. Основной результат

Задано семейство полиномов

$$P_n(s,\lambda)=\lambda^{n_2}s^{n_2}P_{n_2}(s)+\lambda^{n_2-1}s^{n_2-1}P_{n_2-1}(s)+\ldots+\lambda sP_1(s)+P_0(s), \quad (1)$$

где

$$P_i(s)=a_{in_1}s^{n_1}+a_{i(n_1-1)}s^{n_1-1}+\ldots+a_{i1}s+a_{i0},$$

$$\left|a_{ij}-a_{ij}^0\right|\le\gamma\alpha_{ij},\ i=\overline{0,n_2},\ j=\overline{0,n_1},\ n=n_1+n_2.$$

Параметр λ является сингулярно возмущающим поскольку при $\lambda=0$ степень полинома (1) понижается с n до n_1. Далее полином, корни которого лежат в левой полуплоскости, будем называть устойчивым. Задача заключается в поиске таких $\lambda_{max}>0$ и $\gamma_{max}>0$, что семейство (1)

Робастная устойчивость семейства (1) для всех $0\le\lambda\le\lambda_{max}$ при $\gamma=0$ гарантируется устойчивостью «медленного» полинома $S(s)=P_0(s)/a_{0n_1}$ и «быстрого» полинома $F(s)=\sum_{i=0}^{n_2}a_{in_1}s^i$, где критическое значение параметра λ_{max} определяется *оценкой жесткости* $\vartheta_*=1/\lambda_{max}$ [2]. Этот результат следует из теоремы Климушева-Красовского. Для того чтобы применить его при $\gamma>0$ от понятия устойчивости полиномов $S(s)$ и $F(s)$ нужно перейти к понятию робастной устойчивости.

Робастная устойчивость каждого из полиномов $S(s)$ и $F(s)$ гарантируется для всех $0\le\gamma\le\gamma_{max}$ при устойчивости 4-х вершинных полиномов, максимальное значение γ_{max} называется *радиусом устойчивости* [1].

Используя изложенные выше соображения, запишем алгоритм поиска радиуса устойчивости и оценки жесткости семейства (1):

1. Определяем радиусы устойчивости $\gamma_{F\max}$ и $\gamma_{S\max}$ полиномов $F(s)$ и $S(s)$ соответственно; вводим величину

$$\gamma_*=\min\{\gamma_{S\max},\gamma_{F\max}\}.$$

2. Поскольку при $\gamma=\gamma_*$ один из полиномов $F(s)$ и $S(s)$ будет находиться на границе робастной устойчивости, то все семейство (1) также будет лежать на границе робастной устойчивости, и при этом $\lambda_{max}=0$. Следовательно, радиус устойчивости семейства (1) нужно выбирать меньше чем γ_*, т.е. $\gamma_{max}<\gamma_*$. Конкретный

[1] Севастопольский национальный технический университет, ул. Университетская, 33, Севастополь, 99053, УКРАИНА, E-mail: patronne@mail.ru

выбор γ_{max} должен опираться на требования к интервальной неопределенности в коэффициентах многочлена (1).

3. Зная радиус устойчивости γ_{max}, составляются 4 вершинных полинома семейства (1), для которых затем определяются оценки жесткости ϑ_l, $l=\overline{1,4}$.

4. Оценка жесткости семейства (1) определяется как

$$\vartheta_* = \max_l \vartheta_*^l, \ l=\overline{1,4}. \quad (2)$$

III. Численный пример

Рассмотрим следующее семейство полиномов:

$$P_5(s,\lambda) = \lambda^2 s^2 P_2(s) + \lambda s P_1(s) + P_0(s), \quad (3)$$

где

$$P_i(s) = a_{i3}s^3 + a_{i2}s^2 + a_{i1}s + a_{i0}, \ i=\overline{1,n_2},$$

$$|a_{00}-1.5| \le \gamma 0.05, |a_{01}-2.5| \le \gamma 0.02, |a_{02}-3| \le \gamma 0.1,$$

$$|a_{03}-4.25| \le \gamma 0.01, |a_{10}-0.5| \le \gamma 0.05, |a_{11}| \le \gamma 0.02,$$

$$|a_{02}-2| \le \gamma 0.1, |a_{13}-1.25| \le \gamma 0.01, |a_{20}| \le \gamma 0.05,$$

$$|a_{21}-1| \le \gamma 0.02, |a_{22}-0.2| \le \gamma 0.1, |a_{23}-1| \le \gamma 0.01,$$

$$n_1 = 3, \ n_2 = 2.$$

Радиус устойчивости медленного полинома равен

$$\gamma_{S\max} = 2.1053,$$

а радиус устойчивости быстрого полинома равен

$$\gamma_{S\max} = 100.$$

Следуя пункту 2, выберем радиус устойчивости семейства (2) равным

$$\gamma_{max} = \frac{\gamma_{S\max}}{2} = 1.0527.$$

Для нахождения оценки жесткости далее составляем вершинные полиномы, которые в общем виде можно записать так

$$P_5(s,\lambda) = \lambda^2 s^2 P_{l2}(s) + \lambda s P_{l1}(s) + P_{l0}(s), \ l=\overline{1,4}.$$

Поскольку в данном примере $n_2 = 2$, то здесь имеет место оценка жесткости 2-го порядка. Согласно результатам из [2], для оценки ϑ_2 имеем:

$$\vartheta_2 = \max_{\omega\in\Omega} \frac{\omega(R_1(\omega)R_2(\omega) + V_1(\omega)V_2(\omega))}{V_2(\omega)R_0(\omega) - R_2(\omega)V_0(\omega)}, \quad (4)$$

где

$$R_i(\omega) = a_{i0} - a_{i2}\omega^2 + \ldots + (-1)^r a_{i(2r)}\omega^{2r},$$

$$V_i(\omega) = a_{i1}\omega - a_{i3}\omega^3 + \ldots + (-1)^l a_{i(2l+1)}\omega^{2l+1},$$

а множество частот Ω удовлетворяет условию (далее зависимость от ω опускаем для упрощения записи)

$$\Omega = \left\{\omega : \frac{(V_2R_0 - R_2V_0)^2}{R_0R_1 + V_0V_1} = R_1R_2 + V_1V_2\right\}. \quad (5)$$

Применяя (4), (5) получаем такие значения оценок жесткости:

$$\vartheta_2^1 = 5.92, \ \vartheta_2^2 = 2.556,$$

$$\vartheta_2^3 = 2.309, \ \vartheta_2^4 = 4.602.$$

Согласно формуле (2) для оценки жесткости семейства (3) окончательно получаем

$$\vartheta_* = \max_l \vartheta_*^l = 5.92.$$

На рис. 1 приведен корневой годограф семейства (3) при изменении параметров $0 \le \lambda \le \lambda_{max}$ и $0 \le \gamma \le \gamma_{max}$, откуда видно, что семейство (3) робастно устойчиво.

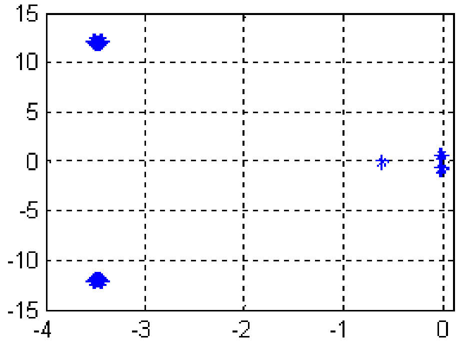

Рис.1. Корневой годограф семейства (3).

IV. Заключение

Для полиномиальных семейств рассмотрен смешанный способ описания неопределенности, основанный на интервальном и сингулярно возмущенном подходах. Предложен метод определения радиуса устойчивости и оценки жесткости рассматриваемого семейства полиномов. Приведенные результаты можно использовать для анализа и синтеза робастных систем управления, заданных передаточными функциями. Робастные свойства системы в этом случае будут зависеть от коэффициентов регулятора, которые необходимо выбирать такими, чтобы замкнутая система обладала заданными жесткостью и радиусом устойчивости.

Дальнейшие исследования в этом направлении должны быть сосредоточены на разработку методов анализа робастных свойств матричных семейств с неопределенностью смешанного вида, что позволит применить эти результаты для систем в пространства состояний.

Перечень ссылок

[1] Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков, "Робастная устойчивость и управление", Москва, Наука, 2002.

[2] А.А. Кабанов, С.А. Дубовик, "Мера устойчивости к сингулярным возмущениям и робастные свойства линейных систем", Проблемы управления и информатики, Вып. 3, сс.17-28, март 2010.

[3] А.И. Климушев, Н.Н. Красовский, "Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных", ПММ, Т.25, сс.680-690, 1961.

[4] R. Bouyekhf, A. El-Moudni, "On Analysis of discrete singularly perturbed non-linear systems: application to the study of stability properties", Journal of Franklin Institute, Vol. 334B, pp.199-212, 1998.

[5] В.М. Кунцевич, "Управление в условиях неопределенности: гаран-тированные результаты в задачах управления и идентификации", Киев, Наук. думка, 2006.