УДК 519.71:510.22

Аналіз робастної дисипативності дискретних динамічних систем

М.М. Личак[1]

Abstract – **It is proposed to use a specially constructed sequence of sets of Lyapunov functions, which can allow one to improve the initial estimate of the boundary set of a dissipative system in the limiting case. Examples of investigating the dissipative of discrete systems with unknown parameters are given.**

Keywords – **Дискретні системи, динаміка, робастна дисипативність, функції Ляпунова, частотний критерій.**

I. Вступ

Математичною моделлю динаміки багатьох дискретних динамічних систем є різницеві рівняння [1]. Дискретний аналог методу функцій Ляпунова широко використовується для аналізу динаміки дискретних систем керування [2]. При наявності адитивних обмежених збурень чи при авто коливних процесах в системі, немає асимптотичної стійкості, але можлива дисипативність, для дослідження якої також може застосовуватись метод функцій Ляпунова [2]. При цьому фактично знаходиться оцінка мінімальної інваріантної множини, до якої збігаються фазові траєкторії системи [3]. Головною проблемою є вибір такої функції Ляпунова, що дозволяє провести цей аналіз досить ефективно. З іншого боку, при невизначеності значень постійних параметрів системи, коли лише відома множина у просторі параметрів, якому належить невідоме істинне значення вектора параметрів, необхідно модифікувати сам метод [4].

II. Постановка задачі

Розглядаються дискретні системи, що описуються векторним різницевим рівнянням

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, L, F_n, n), n = n_0, n_0+1, \ldots, X_{n_0} = X^{(0)}, \quad (1)$$

де X_n – вектор фазових координат системи, $\Phi(X_n, L, F_n, n)$ – задана нелінійна вектор-функція, обмежена на всякій обмеженій множині значень X_n і n, L – вектор невідомих числових параметрів системи, а F_n – вектор зовнішніх обмежених збурень. Будемо вважати, що про параметри системи і зовнішні збурення лиш відомо, що їх значення належать заданим обмеженим множинам (для збурень, в загальному випадку, нестаціонарним), тобто

$$L \in \Omega_L, \quad F_n \in \Omega_F^{(n)} \ \forall\, n \ge n_0 . \quad (2)$$

Вводиться поняття робастної дисипативності, області робастної дисипативності та оцінки граничної множини, а також мінімально можливої такої оцінки [4].

Означення. Нехай для системи (1) при виконанні умов (2) у її фазовому просторі існує деяка замкнута множина Π_X, що містить точку $X = 0$ і деякий її замкнутий окіл. При цьому, для усіх L і F_n з (2), а також для даного n_0 і всіх початкових станів $X^{(0)}$, що належать більш обширній замкнутій множині зазначеного простору $\Omega_X \supset \Pi_X$ (тобто такій, що містить Π_X як підмножину) існує такий скінчений момент часу $N = N(\Omega_X, \Omega_L, \Omega_F^{(n)}, n_0)$, для якого $X_n \in \Pi_X \ \forall\, n \ge N$.

Тоді система (1) називається робастно дисипативною, множина Ω_X називається областю її робастної дисипативності, а множина Π_X – оцінкою її граничної множини. Якщо областю робастної дисипативності є весь фазовий простір системи (1) при виконанні умов (2), то вона називається робастно дисипативною у цілому.

Передбачається існування мінімально можливої оцінки невідомої в загальному випадку граничної множини.

Задача аналізу динаміки дискретних систем виду (1) для усіх L і F_n з (2) ставиться як задача встановлення умов її робастної дисипативності.

III. Загальні результати

Теорема 1 (про робастну дисипативність) [4]. Нехай для системи (1) при всіх L і F_n з (2) визначена скалярна додатно визначена функція Ляпунова $v^{(0)}(X_n, L, n)$ в деякій скінченій області $\Omega_X^{(0)}$ фазового простору $E^m = \{X_n\}$, що виділяється нерівністю

$$\bigcap_{L \in \Omega_L} \{\inf_{n \ge N_0} [v^{(0)}(X_n, L, n)] \le \mu^{(0)}(L)\}, \quad (3)$$

де $\mu^{(0)}(L) > 0 \ \forall\, L \in \Omega_L$ – деякий числовий параметр, N_0 – деякий скінчений момент часу. Причому функція Ляпунова така, що виконується нерівність

$$\max_{F_n \in \Omega_F^{(n)}} \max_{L \in \Omega_L} \{\Delta v_n^{(0)} + \tau_0(X_n, L, F_n, n)[v^{(0)}(X_n, L, n) - \mu_0(L)]\} <$$
$$< 0 \ \forall\, n \ge N_0, \quad (4)$$

де $\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = v[\Phi(X_n, L, F_n, n), n+1] - v(X_n, n)$, для усіх $(X_n \ne 0) \in \Omega_X^{(0)}$, $L \in \Omega_L, F_n \in \Omega_F^{(n)}$, $n \ge N_0$ і деякої функції $0 < \tau_0(X_n, L, F_n, n) < 1 \ \forall\, (X_n \ne 0) \in \Omega_X^{(0)}$ (кусочно-неперервної) та числового параметра $0 < \mu_0(L) < \mu^{(0)}(L)$.

Якщо множина $\Pi_X^{(0)}$, що виділяється у фазовому просторі нерівністю

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{\inf_{n \ge n_0} v^{(0)}(X_n, L, n) \le \mu_0(L)\}, \quad (5)$$

[1] Інститут космічних досліджень НАН та ДКА України, проспект Акад. Глушкова, 40, корпус 4/1, Київ-187, 03680, МСП, УКРАЇНА, E-mail: m_lychak@mail.ru

належить множині Ω_X, що виділяється нерівністю

$$\bigcap_{L \in \Omega_L} \{\sup_{n \ge N_0} [v^{(0)}(X_n, L, n)] \le \mu^{(0)}(L)\}, \qquad (6)$$

то система (1) при всіх L і F_n з (2) робастно дисипативна в Ω_X, а множина $\Pi_X^{(0)}$ є оцінкою її граничної множини.

Лема. Нехай для системи (1) виконані умови Теореми 1, тобто установлена властивість робастної дисипативності (у деякій скінченій області Ω_X фазового простору E^m або в цілому) і отримана оцінка граничної множини $\Pi_X^{(0)} \subset \Omega_X$. Крім того, на множині $\Pi_X^{(0)}$ визначена така нова скалярна додатно визначена функція Ляпунова $v^{(1)}(X_n, L, n)$, що для неї при всіх $(X_n \ne 0) \in \Pi_X^{(0)}$ виконуються умови Теореми 1 з новими деякою функцією $0 < \tau_1(X_n, L, F_n, n) < 1 \; \forall \, (X_n \ne 0) \in \Pi_X^{(0)}, n \ge N_0$ (кусочно-неперервною) та числовим параметром $0 < \mu_1(L) < \mu^{(0)}(L)$. Тоді отримаємо нову апостеріорну оцінку граничної множини $\widehat{\Pi}_X^{(1)} \subset \Omega_X$, що виділяється у фазовому просторі нерівністю

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{\inf_{n \ge N_0} [v^{(1)}(X_n, L, n)] \le \mu_1(L)\}. \qquad (7)$$

Результуючою оцінкою граничної множини дисипативної системи (1) є множина $\Pi_X^{(1)}$, обумовлена згідно

$$\Pi_X^{(1)} = \widehat{\Pi}_X^{(1)} \bigcap \Pi_X^{(0)}. \qquad (8)$$

При виконанні умови

$$\Pi_X^{(0)} \not\subset \widehat{\Pi}_X^{(1)}, \qquad (9)$$

нова оцінка буде більш точною, у порівнянні з попередньою оцінкою $\Pi_X^{(0)}$. Природно, процес уточнення оцінок виду (8) може бути продовжений.

Теорема 2. Нехай для системи (1) при всіх L і F_n з (2) існує послідовність скалярних функцій типу Ляпунова $v^{(k)}(X_n, L, n)$ $(k = 0,1,2,..., K,\ K = \text{const})$ таких, що функція $v^{(0)}(X_n, L, n)$ задовольняє умовам Теореми 1, функція $v^{(1)}(X_n, L, n)$ задовольняє умовам Леми, а функції $v^{(k)}(X_n, L, n)$ при $k > 1$ дозволяють одержувати нові оцінки граничної множини $\Pi_X^{(k)}$ аналогічно Лемі, згідно (8) і (9), але з заміною „1” на „k” і „0” на „$k-1$”.

Тоді отримаємо послідовність оцінок граничної множини, що не погіршуються, робастно дисипативної системи (1) $\Pi_X^{(k)}$ ($k > 0$), що задаються виразами виду (7) і (8), але з заміною „1” на „k” і „0” на „$k-1$”. При цьому множина $\Pi_X^{(K)}$ буде найменшою отриманою оцінкою граничної множини системи (1).

IV. Приклади аналізу дисипативності

Розглядається дискретна нелінійна система (виду (1))

$$X_{n+1} = AX_n + B\ (\sigma_n, n), \sigma_n = C^T X_n, \qquad (10)$$

де A – $m \times m$ - квадратна числова матриця, B і C – m - мірні числові вектори, а функція (σ_n, n) така, що

$$\inf_{\sigma, n \ge n_0} \{\ (\sigma, n)[\sigma - \alpha^{-1}\ (\sigma, n)]\} \ge -\mu^{(0)} = \text{const} > 0 \; \forall \, \sigma, \qquad (11)$$

де $\alpha = \text{const} > 0$ – числовий параметр, що задає «кутові» властивості нелінійності.

Твердження 1. Нехай матриця A коефіцієнтів системи (10) така, що її власні значення лежать строго всередині одиничного кола, а значення нелінійної функції (σ_n, n) задовольняють обмеженню (11).

Тоді, якщо для деякого числа $0 < \tau_0 < 1 - |\lambda_{\max}(A)|^2$, тобто такого, що власні значення матриці $\widetilde{A} = A / \sqrt{1 - \tau_0}$ лежать строго усередині одиничного кола, при усіх $0 \le \theta \le \pi$ виконана частотна нерівність

$$k^{-1} + \operatorname{Re} W(e^{i\theta}) \ge 0, \qquad (12)$$

де $W(z) = C^T(\widetilde{A} - zI_m)\widetilde{B}$ $(\widetilde{B} = B / \sqrt{1 - \tau_0})$, то система (10) дисипативна в цілому, а оцінка її граничної множини виду (5) виділяється нерівністю

$$X_n^T P X_n \le \mu^{(0)} / \tau_0, \qquad (13)$$

де число $\mu^{(0)}$ задається з обмеження (11), а матриця P визначена з нелінійного матричного рівняння (типу дискретного алгебраїчного рівняння Ріккаті)

$$\begin{aligned} &A^T PA - (1 - \tau_0)P + (A^T PB + C/2)(k^{-1} - B^T PB)^{-1} \times \\ &\times (A^T PB + C/2)^T = 0 \end{aligned}. \qquad (14)$$

При цьому, згідно (13) справедлива оцінка дисипативності по координаті σ_n, у тому змісті, що існує такий скінчений момент часу $N = N(X_{n_0}, n_0)$, після якого

$$\sigma_n^2 \le \mu_\sigma^{(1)} = C^T P^{-1} C \cdot \mu^{(0)} / \tau_0 \quad \forall n \ge N. \qquad (15)$$

Отримані умови дисипативності узагальнені на випадок невизначених числових параметрів і адитивного обмеженого зовнішнього збурення. Розглянуті можливості поліпшення оцінок виду (13) і (15).

Список посилань

[1] Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз. – 1963.

[2] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с..

[3] Кунцевич В.М., Поляк Б.Т. Инвариантные множества нелинейных дискретних систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №6. – С. 6-21.

[4] Лычак М.М. Робастная диссипативность дискретных систем и ее исследование с помощью последовательности множеств функций Ляпунова //Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 13-23.