УДК 004.032+530.145

Ідентифікація динамічного хаосу та динамічних систем одновимірних реалізацій

А.Ю. Зінченко[1]

Abstract – **One have offered the information technology of chaotic behavior identification of one-dimensional scalar realization (scalar time series) of dynamic systems and the reconstruction of their dynamic systems. For optimization of computations, the method of length estimation for partitioning of phase trajectories and the estimation of minimum distance between 2 points on the phase trajectory are offered.**

Ключові слова – **динамічний хаос, кореляційні інтеграли, атрактор, псевдофазова реконструкція, ідентифікація.**

Key words – **dynamic chaos, correlation integrals, attractor, pseudophase reconstruction, identification.**

I. Вступ

Задача моделювання реальних дисипативних систем, що проявляють хаотичну поведінку, істотно ускладнюється, якщо інформація про об'єкт дослідження обмежена одновимірною реалізацією однієї із координат стану системи або наявністю лише спостережуваних скалярних часових послідовностей. Для побудови таких математичних моделей в 1981р. була доведена друга теорема про вкладення [1], що забезпечує умови, за якими довільна множина точок фрактальної розмірності Мінковського (гладкий атрактор) може бути реконструйована за спостереженнями, зробленими за допомогою узагальнених функцій категорії Бера (пізніше – інших класів). В 1987р. був запропонований алгоритм глобальної реконструкції [2] з подальшими модифікаціями, що реалізується в 3 етапи: на першому етапі виконується візуалізація ряду, виділення тренду, виявлення перехідного режиму, процесу підготовки, сталого процесу хаотичних коливань, ідентифікація та аналіз хаотичної динаміки; на другому – визначається розмірність простору вкладень, часова затримка та реконструюються замкнені траєкторії за скалярним часовим рядом $x_i = x(i\Delta t), i = 1,..., N$; на третьому – здійснюється ідентифікація динамічної системи, наприклад, методом інваріантного погруження чи регресійними моделями (конкретизація оператора еволюції методом найменших квадратів).

Дана робота присвячена розробці інформаційної технології ідентифікації динамічного хаосу та самої динамічної системи (параметрів реконструйованої динамічної системи) одновимірних скалярних реалізацій або скалярних часових рядів. Запропоновано методологію дослідження, яка базується на 15 різних сучасних методах, деякі з яких були модифіковані: вперше запропоновано оцінки довжини розбиття фазових траєкторій вихідного сигналу та мінімальної відстані між 2 точками на фазовій траєкторії атрактора (необхідна для визначення оптимальної довжини розбиття фазових траєкторій), що дозволило оптимізувати обчислення кореляційних інтегралів у методах кореляційної розмірності, розмірності вкладень, розмірності Колмогорова та тесту Брока, скоротивши при цьому трудомісткі обчислення. Реалізований авторами метод обчислення відповідного значення ε для одновимірної реалізації в тесті Гілмора виявився більш оптимальним, ніж відомий, для відображення і побудови графіку "тісного повернення" при занадто малій чи великій максимальній відстані між двома спостереженнями. Крім того, використаний для ідентифікації систем метод інваріантного погруження показав, що вплив стохастичного шуму в самому методі не впливає на хаотичність атракторів.

Важливими кількісними та якісними характеристиками хаотичної динаміки у фазовому просторі довільної розмірності, які ідентифікують динамічний хаос за різними критеріями на першому етапі алгоритму глобальної реконструкції [2], є алгоритми [2,3]: старший показник Ляпунова λ_1; ентропія Колмогорова *K*; показник Херста; автокореляційна функція; тест Гілмора; тест залишків Брока; фрактальна розмірність Мінковського; показник Херста та кореляційна розмірність перемішаних випадковим способом даних, а також виділення тренду та візуалізація динаміки одновимірних реалізацій. Докладніше із цими методами можна познайомитися в [3].

II. Методи дослідження

Нехай маємо скалярну часову послідовність $x_i = x(i\Delta t), i = 1,..., N$ і обчислену часову затримку τ. Тоді, зафіксувавши конкретне ціле *m* і застосувавши ідею псевдофазової реконструкції (1), можна отримати набір точок $x_i^{(m)}$. Для вибраного *m*, послідовно розглядаючи $m = 1,2,3,...,$ і отриманої вибірки $x_i^{(m)}$ лінійною регресією за МНК, використовуючи формулу кореляційної розмірності $D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0}[\ln C_m(\varepsilon) / \ln \varepsilon]$, де ε – довжина грані *m*-вимірного куба, тобто довжина розбиття фазової траєкторії, а $C_m(\varepsilon)$ – кореляційний інтеграл, обчислюється кореляційна розмірність $D_2(m)$. Починаючи з деякої розмірності *m* кореляційна розмірність D_2 досягає насиченості і перестає змінюватися. Чисельне значення цього рівня дає оцінку кореляційної розмірності атрактора D_2, а значення *m*, при

[1] Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», E-mail: arrttem@yandex.ru

якому відбувається насиченість, є оцінкою мінімальної розмірності вкладення, тобто найменшою цілою розмірністю простору, що містить весь атрактор [3].

В роботі [2], застосовуючи розроблену інформаційну технологію до одновимірних реалізацій, отриманих при інтегруванні рівнянь генератора Ван-дер-Поля, системи Реслера, Лоренца [3] та інших, ми переконалися в тому, що залежність від $\|x_i - x_j\|_{i,j=1,...,N}$ кожної довжини грані *m*-вимірного куба $\varepsilon_{1,..,l}, l \in (\Delta t,..., N\Delta t)$ окремо демонструє збіжність до деяких оптимальних значень $\varepsilon^0_{1,...,l}$ при збільшені $\varepsilon_{1,...,l}$, які за алгоритм Грассберга-Прокаччія $\varepsilon_{1,...,l} \to 0$. При цьому отримуємо оптимальні значення кореляційних інтегралів $C^0_m(\varepsilon_{1,...,l})$. Адже, якщо $\varepsilon_{1,...,l}$ вибирають занадто великими по відношенню до $\|x_i - x_j\|_{i,j=1,...,N}$, то це призведе до занадто малої кількості $C_m(\varepsilon_{1,...,l})$ у вибірці ($C_m(\varepsilon_{1,...,l}) \to 0$ при великих $\varepsilon_{1,...,l}$), а отже до неможливості оцінки лінійною регресією (МНК) розмірності вкладення *m* та кореляційної розмірності $D_2(m)$. Якщо ж $\varepsilon_{1,...,l}$ вибрані занадто малі по відношенню до $\|x_i - x_j\|_{i,j=1,...,N}$, то всі відстані між двома довільними точками на фазовій траєкторії задовольняють умові функція Хевісайда і призводять до занадто великої послідовності $C_m(\varepsilon_{1,...,l})$, що у свою чергу приводить до трудомістких обчислень при знаходженні розмірність *m*.

Введемо величину відносної похибки вибору довжини грані $\varepsilon_{1,...,l}$, що обумовлює некоректний підбір $[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N}$, а значить правильне визначення кореляційної розмірності $D_2(m)$ та розмірності простору вкладення *m*, $\delta^{[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N}}_{1,...,l} = \left\|\varepsilon_{1,...,l} - \varepsilon^0_{1,...,l}\right\| / \left\|\varepsilon^0_{1,...,l}\right\|, l \in (\Delta t,..., N\Delta t)$. Задавши величину допустимої похибки $\delta^{max}_{1,...,l}$, за допомогою обвідної $\varepsilon_{1,...,l}([x_i - x_j]_{i,j=1,...,N})$ можна визначити мінімальну відстань між двома точками на фазовій траєкторії атрактора $[x_i - x_j]^{min}_{i,j=1,...,N}$, як таку, що для будь-якої відстані $[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N} > [x_i - x_j]^{min}_{i,j=1,...,N}$ значення $\delta^{[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N}}_{1,...,l}$ буде менше $\delta^{max}_{1,...,l}$. Оцінка $[x_i - x_j]^{min}_{i,j=1,...,N}$ дозволяє вказати мінімальну відстань між двома точками на фазовій траєкторії атрактора, яка необхідна для визначення оптимальних довжин грані *m*-вимірного куба $\varepsilon^0_{1,...,l}$ із заздалегідь заданою точністю.

На практиці оптимальні оцінки розбиття фазової траєкторії $\varepsilon^0_{1,...,l}$ вибирались за наступним алгоритмом. На першому кроці величини $[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N}$ впорядковуються за зростанням і відкидаються однакові елементи. Отриману послідовність позначимо як $P_{s=1,...,N^2-h}$, де *h* – кількість викинутих елементів, $N^2 - h \ge 1$. Тоді $\varepsilon^0_1 = P_1$, оскільки при виборі меншого ε^0_1 $C_m(\varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \ln C_m(\varepsilon_1) = -\infty$, що унеможливлює подальші розрахунки. Мінімальними значеннями $\varepsilon^0_{2,...,l}$, при яких змінюються відповідні кореляційні інтеграли $C_m(\varepsilon)$, є значення $P_{s=2,...,N^2-h}$, $N^2 - h \ge 1$. Якщо для деякого $\varepsilon^0_{1,...,l}$ відповідний кореляційний інтеграл $C_m(\varepsilon)$ знаходиться в околі 1 чи, якщо для деякого *g*, $g \in 1,...,l$, виконується умова $\varepsilon^0_{1,...,g} \ge [(\max[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N} - \min[x_i - x_j]_{i,j=1,...,N}) / 2]$, то доцільно закінчити вибір $\varepsilon^0_{1,...,l}$.

III. Висновок

Запропоновано підхід до виявлення динамічного хаосу та реконструкції динамічних систем за одновимірними реалізаціями, отриманими чисельними ітеративними методами розв'язання неперервних динамічних систем, або скалярними часовими рядами. Крім того, запропоновано оцінку довжини розбиття фазових траєкторій вихідного сигналу та оцінку мінімальної відстані між 2 точками на фазовій траєкторії атрактора, яка необхідна для визначення оптимальної довжини розбиття фазових траєкторій. Отримані оцінки дозволили оптимізувати обчислення кореляційних інтегралів у методах кореляційної розмірності, розмірності вкладень і Колмогорова, тесту Брока, скоротивши трудомісткі обчислення.

На основі даного підходу розроблена інформаційна технологія, яка об'єднує 15 різних методів дослідження.

Список посилань

[1] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics. – Ed. by D.A. Rand and L.-S. Young. Springer-Verlag, Berlin. – 1981. – №.898. P. 366 – 381.

[2] Данилов В.Я., Зінченко А.Ю. До реалізації інструментарію дослідження хаотичної та регулярної поведінки динамічних систем і реконструкції оператора еволюції динамічних систем // Наукові праці ЧДУ ім. Петра Могили. Серія: комп'ютерні технології. – 2010. – том. 130, вип. 143. – С.30 – 38.

[3] Данилов В.Я., В.Я., Зінченко А.Ю. Синергетичні методи аналізу: Методичні вказівки і завдання до виконання самостійних робіт. – К.: НТУУ "КПІ", "ІПСА". – 2011р. – 222с. [електронне видання, свідоцтво про надання грифу НМУ № Е 10/11 – 225 від 24.02.2011р.]