УДК 519.25

Идентификация систем авторегрессионных уравнений в условиях известных ковариационных матриц

А.П. Сарычев[1]

Summary – **The task of coefficients estimation of autoregression equations system in which variables of state in a present time are determined by various previous states of different variables is considered. Quality functional of system autoregression models is entered, conditions of optimality are received. Iterative procedure of estimation is offered and investigated by a method of statistical tests.**

Ключевые слова – **Оценивание коэффициентов в системе авторегрессионных уравнений.**

В [1, 2] рассмотрена задача оценивания коэффициентов при моделировании объектов с многомерным выходом в классе систем регрессионных уравнений, в которых случайные аддитивные составляющие в выходных переменных могут быть статистически зависимы, а множества входных переменных могут быть различными. В докладе полученные в [1, 2] результаты переносятся на класс систем авторегрессионных уравнений.

Пусть функционирование объекта подчиняется закону

$$\overset{o}{\mathbf{x}}(k)=\sum_{q=1}^{h}\overset{o}{\mathbf{Z}}(q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)+\boldsymbol{\zeta}(k),\quad k=1,2,\ldots,h\,, \tag{1}$$

где $\overset{o}{\mathbf{x}}(k)$ – ненаблюдаемый $(n\times1)$-вектор значений k-й переменной состояния объекта в дискретные моменты времени $t=t_i$, $i=1,2,\ldots,n$; n – общее число наблюдений за состоянием объекта; p – число предыдущих состояний объекта, которые влияют на его текущее состояние; $\overset{o}{\mathbf{Z}}(q)$ – $(n\times p)$-матрица p предыдущих ненаблюдаемых значений q-й переменной состояния, $q=1,2,\ldots,h$; h – число переменных состояния, образующих множество X; $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$ – $(p\times1)$-вектор неизвестных коэффициентов; $\boldsymbol{\zeta}(k)$ – ненаблюдаемый случайный $(n\times1)$-вектор.

Пусть априорная информация о значении p и о том, какие именно предыдущие состояния каждой из переменных состояния определяют текущие значения каждой из переменных состояния в законе функционирования объекта (1), представляется совокупностью структурных матриц $\mathbf{S}(k,q)$, $k,q=1,2,\ldots,h$. С учетом введенных структурных матриц закон (1) можно записать в виде

$$\overset{o}{\mathbf{x}}(k)=\sum_{q=1}^{h}\overset{o}{\mathbf{Z}}(q)\,\mathbf{S}(k,q)\,\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)+\boldsymbol{\zeta}(k)=\overset{=}{\mathbf{x}}(k)+\boldsymbol{\zeta}(k)\,, \tag{2}$$

где $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k,q)$ – $(m(k,q)\times1)$-вектор неизвестных коэффициентов; $m(k,q)$ – число столбцов в матрице $\mathbf{S}(k,q)$; $m(k,1)+m(k,2)+\ldots+m(k,h)=m(k)$ – общее число неизвестных детерминированных коэффициентов в модели для переменной состояния с номером k; $\overset{=}{\mathbf{x}}(k)$ – незашумленная ненаблюдаемая составляющая $(n\times1)$-вектора значений k-й переменной состояния объекта.

Модель наблюдения исследуемого объекта имеет вид

$$\mathbf{x}(k)=\overset{o}{\mathbf{x}}(k)+\boldsymbol{\varepsilon}(k),\quad k=1,2,\ldots,h\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}(k)$ – наблюдаемый $(n\times1)$-вектор значений k-й переменной состояния; $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ – ненаблюдаемый $(n\times1)$-вектор значений случайной ненаблюдаемой ошибки измерения k-й переменной состояния.

Введем обозначения:

$$\mathbf{X}=\left[\mathbf{x}(1),\mathbf{x}(2),\ldots,\mathbf{x}(h)\right],\quad \overset{=}{\mathbf{X}}=\left[\overset{=}{\mathbf{x}}(1),\overset{=}{\mathbf{x}}(2),\ldots,\overset{=}{\mathbf{x}}(h)\right], \tag{4}$$

$$\overset{o}{\mathbf{X}}=\left[\overset{o}{\mathbf{x}}(1),\overset{o}{\mathbf{x}}(2),\ldots,\overset{o}{\mathbf{x}}(h)\right], \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\zeta}=\left[\boldsymbol{\zeta}(1),\boldsymbol{\zeta}(2),\ldots,\boldsymbol{\zeta}(h)\right],\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\left[\boldsymbol{\varepsilon}(1),\boldsymbol{\varepsilon}(2),\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}(h)\right]. \tag{6}$$

Модель функционирования и модель наблюдения объекта в обобщенном виде с учетом (4)–(6) имеют вид

$$\overset{o}{\mathbf{X}}=\overset{=}{\mathbf{X}}+\boldsymbol{\zeta}\,,\quad \mathbf{X}=\overset{o}{\mathbf{X}}+\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{7}$$

Пусть относительно $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ выполнено:

$$E\{\boldsymbol{\zeta}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)}\,,\ E\{\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}\}=n\,\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}\,, \tag{8}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)}\,,\ E\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\}=n\,\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}\,, \tag{9}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}\}=\mathbf{O}_{(h\times h)}\,, \tag{10}$$

где $\mathbf{O}_{(n\times h)}$ – нулевая $(n\times h)$-матрица; $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}$ – известные ковариационные $(h\times h)$-матрицы в модели функционирования и модели наблюдения объекта соответственно.

Введем

$$\mathbf{Z}(q)=\left[\begin{array}{c:c:c:c} x_0(q) & x_{-1}(q) & \cdots & x_{-p+1}(q)\\ \hdashline x_1(q) & x_0(q) & \cdots & x_{-p+2}(q)\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline x_{i-1}(q) & x_{i-2}(q) & \cdots & x_{i-p}(q)\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline x_{n-1}(q) & x_{n-2}(q) & \cdots & x_{n-p}(q) \end{array}\right] \tag{11}$$

– $(n\times p)$-матрицу наблюдаемых значений q-й переменной состояния объекта и $(n\times p)$-матрицу ненаблюдаемых

[1] Институт технической механики НАН Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, Днепропетровск, 49600, УКРАИНА,
E-mail: Sarychev@prognoz.dp.ua

ошибок в этих наблюдениях ($q = 1, 2, \ldots, h$)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(Z;q) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \varepsilon_0(q) & \varepsilon_{-1}(q) & \cdots & \varepsilon_{-p+1}(q) \\ \hline \varepsilon_1(q) & \varepsilon_0(q) & \cdots & \varepsilon_{-p+2}(q) \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \varepsilon_{i-1}(q) & \varepsilon_{i-2}(q) & \cdots & \varepsilon_{i-p}(q) \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \varepsilon_{n-1}(q) & \varepsilon_{n-2}(q) & \cdots & \varepsilon_{n-p}(q) \end{array} \right]. \qquad (12)$$

С учетом (10)-(11) для $\mathbf{x}(k)$, $k = 1, 2, \ldots, h$, выполняется

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{q=1}^{h} \mathbf{Z}(q)\mathbf{S}(k,q)\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k,q) + \boldsymbol{\xi}(k), \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{\xi}(k)$ обозначает случайный вектор

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k) - \sum_{q=1}^{h} \boldsymbol{\varepsilon}(Z;q)\mathbf{S}(k,q)\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k,q) + \boldsymbol{\zeta}(k). \qquad (14)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k); \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k) = \left(\begin{array}{c} \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k,1) \\ \hline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k,2) \\ \hline \vdots \\ \hline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k,h) \end{array} \right), \quad k = 1, 2, \ldots, h, \qquad (15)$$

$$\mathbf{X}(k) = \left[\mathbf{Z}(1)\mathbf{S}(k,1) \mid \mathbf{Z}(2)\mathbf{S}(k,2) \mid \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \mid \mathbf{Z}(k)\mathbf{S}(k,k) \mid \ldots \mid \mathbf{Z}(h)\mathbf{S}(k,h) \right], \qquad (16)$$

с учетом которых регрессионные модели (12) можно записать виде

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{X}(k)\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k) + \boldsymbol{\xi}(k) = \overset{\circ}{\mathbf{y}}(k) + \boldsymbol{\xi}(k), \quad k = 1, 2, \ldots, h. \qquad (17)$$

Введем обозначения

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{X}(1) & \mathbf{O}_{(n \times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n \times m(h))} \\ \hline \mathbf{O}_{(n \times m(1))} & \mathbf{X}(2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n \times m(h))} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{O}_{(n \times m(1))} & \mathbf{O}_{(n \times m(2))} & \cdots & \mathbf{X}(h) \end{array} \right], \qquad (18)$$

$$\mathbf{y} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{y}(1) \\ \hline \mathbf{y}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{y}(h) \end{array} \right), \quad \overset{\circ}{\mathbf{y}} = \left(\begin{array}{c} \overset{\circ}{\mathbf{y}}(1) \\ \hline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(h) \end{array} \right), \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} = \left(\begin{array}{c} \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(1) \\ \hline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(h) \end{array} \right), \quad \boldsymbol{\xi} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\xi}(1) \\ \hline \boldsymbol{\xi}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\xi}(h) \end{array} \right). \qquad (19)$$

Тогда систему (17) можно записать в виде

$$\mathbf{y} = \overset{\circ}{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\xi} = \underline{\underline{\mathbf{X}}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi}. \qquad (20)$$

Будем искать оценку коэффициентов в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\,\mathbf{y}, \quad \mathbf{d} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{d}(1) \\ \hline \mathbf{d}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{d}(h) \end{array} \right), \quad \mathbf{d}(k) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{d}(k,1) \\ \hline \mathbf{d}(k,2) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{d}(k,h) \end{array} \right), \quad k = 1, 2, \ldots, h, \qquad (21)$$

где $\mathbf{C}$ – $(M \times N)$-матрица, зависящая от $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$.

Для математического ожидания (21) выполняется

$$E\{\mathbf{d}\} = E\{\mathbf{C}\,\mathbf{y}\} = E\{\mathbf{C}(\overset{\circ}{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\xi})\} = E\{\mathbf{C}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}}\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}\} + E\{\mathbf{C}\,\boldsymbol{\xi}\} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}, \qquad (22)$$

что следует из выполнения условий

$$\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \mathbf{I}_M, \quad E\{\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}\} = \mathbf{0}_M, \qquad (23)$$

где первое условие следует из несмещенности оценок, а второе – из независимости матрицы $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ от вектора $\boldsymbol{\xi}$.

Будем искать такую матрицу $\mathbf{C}$, при которой определитель ковариационной матрицы оценки коэффициентов (21), так называемая «обобщенная дисперсия», принимает минимальное значение и оценки коэффициентов несмещены. Решение этой задачи приводит к результату

$$\mathbf{C} = (\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{X}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}. \qquad (24)$$

В (24) $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ – ковариационная матрица случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$, для которой выполняется

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi} = E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\} = \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon} \otimes \mathbf{I}_n + \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta} \otimes \mathbf{I}_n + \boldsymbol{\Psi}, \qquad (25)$$

где $\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n$ – кронекеровское произведение матриц $\boldsymbol{\Sigma}$ и $\mathbf{I}_n$; $\boldsymbol{\Psi}$ – матрица, которая состоит из $(h \times h)$ блоков, а ее (k,q)-й блок ($k,q = 1, 2, \ldots, h$) – является $(n \times n)$-матрицей:

$$\boldsymbol{\Psi}(k,q) = \qquad (26)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) & \cdots & \psi_{kq}(p-1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) & \cdots & \psi_{kq}(p-2) & \psi_{kq}(p-1) & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \psi_{kq}(-p+1) & \psi_{kq}(-p+2) & \cdots & \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \psi_{kq}(-p+1) & \cdots & \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) \end{array} \right]$$

в которой для величин $\psi_{kq}(\Delta)$, $\Delta = -p+1, -p+2, \ldots$ $\ldots, -1, 0, 1, \ldots, p-2, p-1$, выполняется:

$$\psi_{k_1 k_2}(\Delta) = \qquad (27)$$

$$= \sum_{q_1=1}^{h} \sum_{q_2=1}^{h} \sigma_{\varepsilon}(q_1,q_2)\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k_1,q_1)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(k_1,q_1)\mathbf{I}(i_2 - i_1)\mathbf{S}(k_2,q_2)\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k_2,q_2)$$

где $\mathbf{I}_p(i_2 - i_1)$ – $(p \times p)$-матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов одной диагонали, равных единице: если $\Delta = i_2 - i_1 = 0$, то это главная диагональ; если $\Delta \neq 0$, то это диагональ, расположенная выше (если $\Delta > 0$) или ниже (если $\Delta < 0$) главной диагонали на $|\Delta|$ позиций.

Поскольку в матрицу $\boldsymbol{\Psi}$ входят неизвестные коэффициенты, то на основе (24) построена итерационная процедура оценивания, эффективность которой подтверждена методом статистических испытаний.

Список ссылок

[1] *Сарычев А. П.* Оценивание коэффициентов в системах регрессионных моделей / *А. П. Сарычев* // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 4. – С. 74–82.

[2] *Сарычев А. П.* Оценивание коэффициентов в системах регрессионных уравнений. Случай ковариационной матрицы, известной с точностью до скалярного множителя / *А. П. Сарычев* // Штучний інтелект. – 2004. – № 4. – С. 182–190.