УДК 517.977.52

Задача оптимального синтеза относительно эволюции области

А.А.Нифтиев [1], Дж.И.Зейналов [2]

Аннотация – **In this paper we consider the optimal synthesis associated with a change in shape of the region. State of the system described by a system of differential equations for the pair of regions. It is shown that the minimum conditions for the existence of the functional and the computation of optimal control for the output data associated with the solution of the Riccati equation.**

Ключевые слова – **Опорная функция, задача синтеза, уравнение Риккати, обратная связь.**

I. Введение

Широкий класс задач практики приводит к изучению изменения формы рассматриваемого объекта или тела относительно времени ([1,2]). Примерами таких задач являются диффузионные процессы, задачи расширения или распрямления тела от тепла, задачи теории упругости, экологические задачи, задача распространения нефтяного пятна на поверхности моря, биологические процессы и т.д.

При исследовании этих задач, как правило, изучаются изменения точек тела относительно времени. Однако, часто представляет интерес не изменение точек тела , а изменение его формы. Изучение задачи в такой постановке связано с некоторыми математическими трудностями. Это в первую очередь связано с определением скорости изменения области, характеризирующей форму тела.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального синтеза, относительно эволюция области. Получена формула для решение задачи синтеза оптимальной системы с обратной связью.

Для исследования таких задач в работе определяется скорость изменения формы области в линейном пространстве пар выпуклых множеств. Такое определение изменения области дает возможность исследовать широкий класс таких практических задач, как задачи оптимального управления.

II. Пространство выпуклых множеств

Пусть M совокупность выпуклых замкнутых ограниченных множеств в R^r.

Функция

$$P_D(x) = \sup_{l \in D}(l, x), \, x \in D, \tag{1}$$

называется опорной функцией множества $D \in M$, где $P_D(x)$ является непрерывно-выпуклой и положительно однородной ([3]). Рассмотрим прямое произведение $M \times M$, т.е. совокупность пар (A, B), где $A, B \in M$. Определим в $M \times M$ операции сложения и умножения на вещественное число:

$$(A, B) + (C, D) = (A + C, B + D)$$

$$\lambda(A, B) = (\lambda A, \lambda B), \text{ если } \lambda \geq 0$$

$$\lambda(A, B) = (|\lambda| B, |\lambda| A), \text{ если } \lambda < 0.$$

Введем в $M \times M$ отношение эквивалентнос-ти: пары (A, B) и (C, D) эквивалентны, если $A + D = B + C$. В [3] показано, что множество $M \times M$ вместо с определенными выше алгебраическими операциями является линейным пространством.

Пусть
$a = (A_1, A_2)$, $b = (B_1, B_2)$, A_i, $B_i \in M$, $i = 1, 2$, B – единичный шар, $S_B = \partial B$ -единичная сфера.

Скалярное произведение $a \bullet b$ в $M \times M$ определим следующим образом

$$a \bullet b = \int_{S_B} p(x) q(x) ds, \tag{2}$$

здесь $p(x) = P_{A_1}(x) - P_{A_2}(x)$, $q(x) = P_{B_1}(x) - P_{B_2}(x)$, $P_{A_i}(x), P_{B_i}(x)$ - опорные функции множеств A_i и B_i i=1,2, соответственно. малый индекс - 5, символ - 17 и Пусть $z = [z_1, z_2, ..., z_n]$, $z = [y_1, y_2, ..., y_n]$ являются векторы, где $x_i, y_i \in M \times M$. В этом случае скалярное произведение и норма определяются следуюшим образом:

$$z \bullet y = z_1 \bullet y_1 + z_2 \bullet y_2 + ... + z_n \bullet y_n,$$

$$\|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + ... + \|z_2\|^2.$$

Для простаты, вместе $z \in ML_2^{(n)}$, мы будем написать $z \in ML_2$.

[1] Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, ул. З.Халилов 23, AZ 1148, АЗЕРБАЙДЖАН, e-mail: aniftiyev@yahoo.com
[2] Нахчивнский Государственный Университет, АЗЕРБАЙДЖАН, e-mail: c.zeynalov@mail.ru

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Пусть в момент времени $t \in [0,T]$ изучаемая область имеет форму $D(t)$. При изменении t область $D(t)$ также меняется. Скорость изменения области $D(t)$ характеризуется величиной

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{D(t+\Delta t)}(x) - P_{D(t)}(x)}{\Delta t}, \quad x \in S_B. \quad (3)$$

Если существуют области $V_1(t),\ V_2(t) \in M,\ \ t \in [0,T]$, такие, что

$$\frac{\partial P_{D(t)}(x)}{\partial t} = P_{V_{1(t)}}(x) - P_{V_2(t)}(x), \quad (4)$$

то величину $\dot z(t) = (V_1(t), V_2(t)) \in M \times M$ мы будем называть скоростью изменения области $D(t)$. Можно показать, что для любых $z(t), \eta(t) \in M \times M$, в которых $\|\dot z(t)\| \in L_2(t_0,T),\ \|\dot\eta(t)\| \in L_2(t_0,T)$, верно соотношение

$$\int_{t_0}^{T} \dot z(t) \bullet \eta(t)dt = z(T) \bullet \eta(T) - $$
$$ - z(t_0) \bullet \eta(t_0) + \int_{t_0}^{T} z(t) \bullet \dot\eta(t)d(t).$$

III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТЬТАТЫ

Пусть движения объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot z(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \qquad 0 < t \le T, \ (5)$$

с начальными условиями $z(0) = z_0$ (6)

Требуется найти такой регулятор цепи обратной связи $u(t) = K(t)z(t)$, который минимизировал бы функционал

$$J = \int_0^T \left[z'(t) \bullet L(t)z(t) + u'(t) \bullet R(t)u(t) \right] dt + z'(T) \bullet Qz(T) \ (7)$$

Здесь $z(t) - n -$ мерный вектор фазовых координат объекта $u(t) - m -$ мерный вектор управляющих воздействий
$A(t) -\ n \times n, \quad B(t) -\ n \times m,\ L(t) = L'(t) \ge 0\ \ n \times n,$
$R(t) = R'(t) > 0 \quad m \times m$ мерные матриц функции.

Предположим, что все эти матрицы непрерывны в $[0,T]$. Для простаты изложения здесь мы будем рассматривать случай $R(t) = I$.

Обозначим через U класс функции $u(t) \in M \times M,\ \ 0 \le t \le T$, удовлетворяющие условие $\|u(t)\| \in L_2(0,T)$.

Теорема 1. Пусть $z_0 \in M \times M$. Тогда для любого $u(t) \in U$ существует единственное решение задачи (6), (7) из $M \times M$.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot S(t) = -A'(t)S(t) - S(t)A(t) + S(t)B(t)B'(t)S(t) - L(t) \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть на отрезке $[0,T]$ существует решение уравнения Риккати (8) с условием $S(T) = Q$. Тогда существует управление $u(t)$, которое дает минимум критерию качества (7) для системы (5), (6). Минимальное значение функционала (7) равно $z_0' \bullet S(0)z_0$. Минимизирующее управление в виде обратной связи имеет вид

$$u(t) = -B'(t)S(t)z(t). \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (5) получим уравнение для оптимальной траектории

$$\dot z(t) = \left[A(t) - B(t)B'(t)S(t) \right] z(t). \quad (10)$$

Следствие. Если $H(t,s)$ импульсная матрица этого уравнения, то оптимальное управление дается равенством

$$u(t) = -B'(t)S(t)H(t,0)z_0 \quad (11)$$

Полученная формула (15) или (20) дает решение задачи синтеза оптимальной системы с обратной связью.

СПИСОК ССЫЛОК

[1] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциаль-ного исчисления. М.: Наука, 1990, 400с.

[2] Нифтиев А.А., Гасымов Ю.С. Управление границами и задачи на собственные значения с переменной областью., изд. БГУ, 2004, 185 с.

[3] Нифтиев А.А., Ахмедов Э.Р. Вариационная постановка обратной задачиотносительно области. Дифференциальная уравнения. 2007, т.43, № 10, с. 1410-1416.

[4] Андреев Ю.Н. Управление конечномерным и линейными объектами. . М.: Наука, 1976, 424 с.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua