УДК 531.1, 531.3, 681.5

Моделирование динамики управляемых систем с программными связями

Р.Г. Мухарлямов[1]

Аннотация – **Modeling of system dynamics of led to construction of the differential equations having the constraints equations in partial integrals.**

Ключевые слова – **программные связи, стабилизация связей, система, устойчивость, численное решение.**

I. Введение

Уравнениями классической механики описываются динамические процессы в системах различной физической природы, содержащих электронные схемы, электрические цепи, пневматические, гидравлические, механические и другие элементы [1]. Решение уравнений динамики предусматривает определение реакций связей и при использовании традиционных способов приводит к неустойчивости численного решения по отношению к уравнениям связей [2]. Стабилизация связей достигается построением множества систем дифференциальных уравнений, частными интегралами которых являются уравнения связей [3], что позволяет решать также задачи инвариантности по отношению к возмущениям, оптимальности решений в заданном смысле и обеспечить различные динамические свойства, предъявляемые к системе.

II. Динамические аналогии

Используя аналогии в динамических показателях, фазовое состояние сложной системы описывается в унифицированных переменных [1], и анализ динамических процессов проводится методами классической механики. Так, в работах Я.И. Грдины., Г.В. Коренева, Е.С. Пятницкого исследуются задачи динамики и управления процессами в живых организмах. Аналогии динамических процессов в простейшем экономическом объекте движению точки переменной массы, установленные Т.К. Сиразетдиновым [4], позволили использовать методы аналитической динамики систем с переменной массой для исследования задач моделирования и управления динамикой производственных систем.

Так динамика простого экономического объекта описывается уравнением $\frac{d}{dt}\left(m\frac{dY}{dt}\right)+w\left(Y,\frac{dY}{dt},t\right)=$ $=u\left(Y,\frac{dY}{dt},t\right)$, где Y – объем выпускаемой продукции, $y(t)=dY/dt$ – максимальный объем продукции, которую может выпускать объект в единицу времени при отсутствии ограничений (мощность), $m(t)$ – мгновенная фондоёмкость основных фондов по выпуску данного вида продукции, $q(t)=m(t)y(t)$ – состояние основных производственных фондов, w,u – выбывающие и вновь поступившие с момента t основные фонды. Изменение мощности производственного предприятия, состоящего из N подразделений, с течением времени описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_a}{dt}=v_a,\ \frac{d}{dt}(m_a v_a)+w_a(x_c,v_b,t)= \tag{1}$$

$$=p_a(x_c,v_b,t)+b_{as}(x_c,v_b,t)u^s,\ a,b,c=1,\dots,N,\quad s=1,\dots,S,$$

где по одинаковым индексам проводится суммирование. Требуемые свойства функционирования предприятия задаются уравнениями связей:

$$\omega^p(x_a,t)=0,\omega^r(x_a,v_b\ t)=0, \tag{2}$$

$$p=1,\dots,P,\ \ r=P+1,\dots,R.$$

Если часть уравнений связей (2) $\omega^h(x_a,t)=0$, $h=1,\dots,H$ допускает выражение объемов продукции $x_1,\dots,x_N$ через произвольные обобщенные координаты $q^1,\dots,q^n$:

$$f^{\mu-n}(q^i,t)=0,f^{\rho-n}(q^i,v^j,t)=0, \tag{3}$$

$\mu=n+1,\dots,n+m$, $\rho=n+m+1,\dots,n+m+r$, то система (1) может быть описана уравнениями Лагранжа.

III. Уравнения динамики в обобщенных координатах

Для стабилизации связей (3) вводятся избыточные координаты q^μ,v^μ,v^ρ, оценивающие отклонения от уравнений (3), обусловленные начальными условиями и погрешностями численного интегрирования, и исходная система заменяется расширенной системой, состояние которой определяется фазовыми координатами $q^i,q^\mu,v^i,v^\mu,v^\rho$, удовлетворяющими уравнениям связей $q^\mu=f^{\mu-n}(q^i,t)$, $v^\mu=\phi_i^{\mu-n}v^i+f_t^{\mu-n}$, $v^\rho=f^{\rho-n}(q^i,v^j,t)$.

Динамика системы описывается уравнениями

$$\frac{dq^i}{dt}=v^i,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=Q_i-\frac{\partial D}{\partial v^i}+\lambda_k\phi_i^k,$$

$$\frac{dq^\mu}{dt}=v^\mu,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\mu}=-\frac{\partial D}{\partial v^\mu},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\rho}\right)=-\frac{\partial D}{\partial v^\rho}.$$

где *L*–лагранжиан расширенной системы, *D*–диссипативная функция, Q_i –непотенциальные

[1] Российский Университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, РОССИЯ, E-mail: rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru

обобщенные силы, λ_k –множители Лагранжа, $\phi_i^{\mu-n} = \partial f^{\mu-n} / \partial q^i$, $\phi_i^{\rho-n} = \partial f^{\rho-n} / \partial v^i$. Уравнения динамики могут быть составлены также в канонических переменных.

IV. СТАБИЛИЗАЦИЯ СВЯЗЕЙ

Обозначив через $x = (q^i, v^j)$ и $z = (q^\mu, v^\theta)$ соответственно векторы состояния исходной системы из области допустимых значений *X* и вектор возмущений связей, значения которого принадлежат области *Z*, систему уравнений динамики и уравнений возмущений связей (3) можно представить в виде $\frac{dx}{dt} = v(x, z, t)$, $\frac{dz}{dt} = K(x, t)z,\ \omega(x, t) = z$. Используя для решения системы уравнений динамики простейшие разностные схемы, можно сформулировать следующие утверждения.

Теорема 1. Если матрица $K(x, t)$ может быть представлена в виде произведения $K(x, t) = -A^{-1}L(x, t)$, матрица *A* является постоянной, положительно определенной, матрица $L = L(x, t)$ – положительно определенна при всех $x \in X, t > t_0$, и выполняются условия: $\|L(x, t)\| \ge l > 0; a_1 \le \|A\| \le a_2$, то уравнение $\frac{dz}{dt} = K(x, t)z$ имеет экспоненциально устойчивое тривиальное решение $z = 0$.

Теорема 2. Если для решения системы уравнений $\frac{dx}{dt} = v(x, z, t)$ используется разностная схема $x_{p+1} = x_p + \tau v_p$, $x_p = x_p(t_p)$, $t_p = t_0 + p\tau$, $v_p = v(x_p, z_p, t_p)$ и квадратичная форма $2V = Z^T Az$ с постоянной матрицей *A* коэффициентов оценивает отклонения от уравнений связей, то при выполнении ограничений $z^T Az \ge a_0 \|z\|^2$, $\|z_k\| \le \varepsilon$, $z^T Nz \le aa_0 \|z\|^2$, $\|\tilde{R}\| \le \bar{R}$, $\tau^2 \bar{R} \le \beta a_0 \varepsilon^2$, $\alpha + \beta \le 1$, $x \in X$, $t > t_0$, будет справедливо неравенство $\|z_{k+1}\| \le \varepsilon$.

V. ПРИЛОЖЕНИЯ

Результаты исследований сочетаются с решением прикладных задач динамики и управления.

Разработаны принципиальные схемы и составлены программы решения задачи управления элементом дискретной адаптивной оптической системы, моделируемой твердым телом с шестью степенями свободы и тремя управляющими приводами.

Управление элементом зеркала осуществляется тремя параллельными силами, приложенными к точкам твердого тела, на котором закреплено зеркало, совершающим движения по направляющим.

В задаче управления электромеханической системой, состоящей из блока питания и двигателя постоянного тока, управляющего кривошипно-шатунным механизмом, управление осуществляется переменным напряжением. Построена система уравнений динамики и уравнений связей. Решение дифференциально-алгебраических уравнений и построение фазовых портретов осуществлено с использованием интегрированной системы компьютерной символьной математики Maple.

Решена задача управления движением колесной системы по заданной траектории с обходом подвижных препятствий. Для построения множества траекторий используется решение обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений. Задача моделирования сводится к решению системы семи уравнений динамики и трех уравнений программных связей. Для построения уравнений, решения задачи управления и численного моделирования использована система компьютерной математики Maple.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные методы стабилизации и результаты численных экспериментов свидетельствуют о стабилизации связей в требуемых пределах при использовании простейших разностных схем решения уравнений динамики.

СПИСОК ССЫЛОК

[1] *Layton R.A.* Principles of Analytical System Dynamics. N.-Y. Springer, 1998. 158 p.

[2] *Baumgarte J,* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng.– Vol. 1 – 1972. Pp.1-16.

[3] *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. –Том 21 – № 6 – 1952 – С. 659-670.

[4] Сиразетдинов Т.К. Динамическая модель многоцеловых экономических объектов // Изв. ВУЗов – Авиационная техника – 1973 – 1 – С. 12 -17.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, № 10-01-00381