УДК 519.85

Збіжність ітераційного методу розв’язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців

О.О. Ємець [1], О.В.Ольховська [1]

Annotation – **Convergence of iterative method of combinatorial optimization task solving of playing type with limits-removals for both players is proved.**

Ключові слова – **Задачі комбінаторної оптимізації, Теорія ігор, Переставлення.**

I. Вступ

Задачі комбінаторної оптимізації [1-3] часто зустрічаються на виробництві, а отже потребують методів для їх розв’язання В даній доповіді пропонується математична модель задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з переставними обмеженнями на стратегії обох гравців, та принцип доведення збіжності методу з [4] для розв’язування такого класу задач.

II. Постановка задачі

Розглянемо задачу з [5]. Нехай є два підприємства, які займаються вирощуванням сільськогосподарських культур. Перше господарство на своїх m полях вирощує m різних культур. Поля різної площі, тому кількість кожної вирощеної культури залежить від того, на якому полі вона буде посаджена. У другого господарства є відповідно m полів, на яких вирощується n різних культур. Кожне поле засівається в обох господарств однією культурою повністю. Восени вирощену продукції реалізують, а отже, прибутки обох підприємств залежать від кількості вирощеної продукції кожним господарством. Потрібно скласти оптимальні в деякому сенсі плани вирощування культур обома господарствами.

Складемо математичну модель розглянутої задачі, пояснивши одночасно оптимальність плану.

Позначимо P_i^x – відношення площі i-го поля до суми площ всіх полів господарства. Вектор $P^x = (P_1^x, P_2^x, ..., P_m^x)$ показує, яку частину від загальної суми площ складає площа кожного з полів. Так як P^x – це частина від загальної суми площ, то

$$P_i^x \ge 0;\ \ \forall i \in J_m;\ \sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1,$$

де m натуральні числа $\{1,2,...,m\} = J_m$. Позначимо $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ компоненти вектора X, які є переставленням компонент вектора P^x:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_m(P^x),$$

де $E_m(P^x)$ – множина переставлень з елементів вектора P^x. Для другого господарства введемо аналогічні вектори: $P^y = (P_1^y, P_2^y, ..., P_n^y)$ - вектор, для якого виконується:

$$P_j^y \ge 0 \quad \forall j \in J_n;\ \ \sum_{j=1}^{n} P_j^y = 1.$$

Вектор $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ характеризує обсяги вирощування продукції другим господарством, а отже компоненти даного вектора є переставленнями з P^y: $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E_n(P^y)$.

Складемо матрицю $A = (a_{ij})$, елемент a_{ij} - показує перевищення (різницю) прибутків другого підприємства в порівнянні з першим підприємством. Позначимо $F(X, Y)$ функцію:

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \qquad (1)$$

Функція прибутку є функцією переставлення X та Y. Перший гравець за рахунок своїх можливостей вибору вектора X прагне мінімізувати свій максимальний програш, отже треба знайти таке X^* за якого досягається величина

$$\alpha = \min_{X \in E_m(P_x)} \max_{Y \in E_n(P_y)} F(X, Y),$$

яку будемо називати нижньою ціною гри. Другий гравець, в свою чергу, за рахунок вибору Y^* прагне максимізувати свій мінімальний виграш, тобто визначає величину

$$\beta = \max_{Y \in E_n(P_y)} \min_{X \in E_m(P_x)} F(X, Y),$$

яку будемо називати верхньою ціною гри.

Запишемо математичну модель поставленої розглянутої задачі.

Знайти оптимальні стратегії гравців X^* і Y^*, де

$$X^* = \arg F_x(X^*);\ F_x(X^*) = \min_{X \in E_m(P^x)} F_x(X),$$

$$F_x(X) = \max_{Y \in E_n(P^y)} F(X, Y);$$

$$Y^* = \arg F_y(Y^*);\ F\ (Y^*) = \max_{Y \in E_n(P^y)} F(Y),$$

$$F_y(Y) = \min_{X \in E_m(P^x)} F(X, Y);$$

[1] Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, 36000, УКРАЇНА, E-mail: contacts@informatics.org.ua, yemetsli@mail.ru

за обмежень:

- $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_m(P^x)$,

  $X = (x_1, ... x_m) : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$;
- вектор $P^x = (P_1^x, P_2^x, ..., P_m^x)$, задовольняє умовам $P_i^x \geq 0 \ \forall i \in J_m$
- $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E_n(P^y)$,

  $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) : \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$;
- вектор $P^y = (P_1^y, P_2^y, ..., P_n^y)$, задовольняє умовам $P_j^y \geq 0 \quad \forall j \in J_n$;

де функція $F(X, Y)$ має вигляд (1), a_{ij} $(\forall i \in J_m \ \forall j \in J_n)$ - задані дійсні числа.

Задачу, яка має описану вище математичну модель, будемо назвати задачею комбінаторної оптимізації ігрового типу з переставними обмеженнями на стратегії обох гравців.

III. Теорема про збіжність

Для розв'язування такого типу задач, розроблено ітераційний метод [1]. Введемо необхідні для подальшого викладу означення.

Позначимо $A_{i.}$ i-й рядок матриці A, а $B_{.j}$ - j-й стовпець. Нехай $SUM_1(N)$ - вектор в наступній послідовності:

$$\{SUM_1(0), SUM_1(1), ..., SUM_1(N), ...\}.$$

Позначимо його j-ту координату $SUM_{1j}(N)$ та

$$\max SUM_1(N) = \max_j SUM_{1j}(N),$$

$$\min SUM_1(N) = \max_j SUM_{1j}(N).$$

Означення. Векторною системою (SUM_2, SUM_1) для матриці A, яка складається із послідовності m - вимірних векторів $SUM_2(0), SUM_2(1), ...$, та n вимірних векторів $SUM_1(0), SUM_1(1), ...$ називається система для якої виконуються такі умови:

1. Вектори $SUM_1(0), SUM_2(0)$ - нульові, тобто $SUM_1(0) = (0, ..., 0)$, $SUM_2(0) = (0, ..., 0)$.

Зауважимо, що тоді виконується умова $\min SUM_2(0) = \max SUM_1(0) = 0$.

2. Виконується

$$SUM_2(N+1) = SUM_2(N) + A_i,$$

$$SUM_1(N+1) = SUM_1(N) + B_j,$$

де i, j задовольняють співвідношенню

$$SUM_{1i}(t) = \max_j SUM_1(N), \quad SUM_{2j}(t) = \max_i SUM_2(N).$$

При реалізації алгоритму методу система (SUM_2, SUM_1), що утворюється, задовольняє означенню та властивостям векторної системи.

Для кожного N (N - кількість ітерацій методу) буде виконуватися :

$$\frac{\min SUM_2(N)}{N} \leq v \leq \frac{\max SUM_1(N)}{N}.$$

Розв'язок гри одержується, коли ці границі рівні при $N \to \infty$. Доведена теорема встановлює цей факт.

Теорема. Якщо у процесі роботи алгоритму ітераційного методу [4] для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців утворена векторна система (SUM_2, SUM_1) для матриці A, то

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\min SUM_2(N)}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{\max SUM_1(N)}{N} = v.$$

IV. Висновок

В доповіді сформульована теорема про збіжність ітераційного методу для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців.

Список посилань

[1] Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: - Киев.: УМК ВО, 1992. - 92 с.

[2] Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188с.

[3] Стоян Ю. Г. , Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія і методи: Монографія. - Полтава: ПУСКУ, 2005 - 103 с.

[4] Ємець О.О. Ольховська О.В. Ітераційний метод знаходження оптимальної стратегії гравців в ігрових комбінаторних задачах на переставленнях з обмеженнями на стратегії двох гравців // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (18-19 березня 2011 р.) - Полтава: РВВ ПУСКУ, 2011.- С.110-113.

[5]Емец О. А., Устьян Н. Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и сист. анализ. – 2007. – №6. – С. 103-114.