УДК 62.50

Синтез адаптивных моделей GARCH для прогнозирования максимальных условных дисперсий невязок соотношений координат процесса с разнотемповой дискретизацией

В.Д. Романенко[1], Ю.Л. Милявский[1]

Abstract – **The concept of maximal conditional sample variance of ratio discrepancy is defined and the design method of GARCH model for variance forecast is proposed. Process dynamics in stochastic environment is described by ARMA model with multirate sampling. Adaptive tuning of GARCH model's coefficients is based on recurrent least squares method.**

Ключевые слова – **дисперсия невязки соотношений, разнотемповая дискретизация, прогнозирование.**

Прогнозирование волатильности соотношений является одной из задач, часто возникающих на практике. Как в технических, так и в социально-экономических системах выполнение определенных соотношения играет важную роль, поэтому дисперсия соотношения может выступать в числе главных характеристик, описывающих динамику системы и качество ее работы. Тем не менее, в теоретическом плане задача моделирования и прогнозирования динамики дисперсий соотношений практически не разрабатывалась.

В данной работе рассматривается проектирование моделей GARCH для описания динамики максимальных условных выборочных дисперсий невязок соотношений между координатами гетероскедастических процессов с целью прогнозирования этих дисперсий. Динамика процессов в стохастической среде представлена в виде матрично-полиномиальной модели с разнотемповой дискретизацией [1]:

$$A(z_1^{-1})\bar{Y}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = C(z^{-1})\bar{\xi}(kT_0) + \bar{a}_0, \quad (1)$$

в которой структура полиномов имеет вид

$$A_i(z_1^{-1}) = 1 + a_{1_i} z_1^{-1} + ... + a_{s_i} z_1^{-s},$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = c_{0_{ij}} + c_{1_{ij}} z^{-1} + ... + c_{q_{ij}} z^{-q},$$

$i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$, $\bar{a}_0$ - вектор смещения выходных координат. Дискретизация выходных координат в модели (1) производится с большими периодами квантования h, а входных возмущений – с малыми T_0. При этом соотношение периодов квантования

$$h = mT_0, \quad (2)$$

где m — целое число, большее единицы. Тогда соотношение операторов обратного сдвига будет $z_1^{-1} = z^{-m}$, где z^{-1} — оператор обратного сдвига на один период квантования T_0; z_1^{-1} — оператор обратного сдвига на один период h.

Множество соотношений между выходными координатами гетероскедастического процесса задано в виде

$$S\bar{Y}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \bar{b}, \quad (3)$$

где $\bar{Y} = [Y_1 \quad ... \quad Y_n]^T$ — вектор выходных координат, S - матрица размерности $l \times n$, $S_1, ..., S_l$ – вектор-строки матрицы S, $\bar{b}$ — вектор-столбец размерности l. Линейные соотношения (3) должны выполняться в каждый отсчет дискретного времени, однако в стохастической среде это недостижимо. Поэтому введена невязка соотношений в виде вектора $\bar{e}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) = S\bar{Y}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) - \bar{b}$. В таком случае дисперсии координат вектора $\bar{e}$ являются мерами качества управления соотношениями, поскольку чем меньше дисперсия i-ой координаты невязки e_i $(i = 1, ..., l)$, тем с большей точностью выполняется i-ое соотношение $S_i\bar{Y} = b_i$.

Условное математическое ожидание невязки соотношений для произвольного момента времени jh равно

$$M_{j-1}\{\bar{e}(jh)\} = M_{j-1}\{S\bar{Y}(jh) - \bar{b}\} = S[M_{j-1}\{\bar{Y}(jh)\}] - \bar{b}. \quad (4)$$

В реальных процессах случайные возмущения $\bar{\xi}(kT_0)$ постоянно дрейфуют с низкой частотой и на промежутках времени, сравнимых с инерционностью процесса, имеют ненулевое среднее. В данной работе рассматривается достаточно общий случай, когда возмущение представляется в виде процесса авторегрессии первого порядка

$$\bar{\xi}(kT_0) = g\bar{\xi}((k-1)T_0) + \bar{v}(kT_0), \quad (5)$$

где $\bar{v}(kT_0)$ - гауссовский дискретный белый шум, $g \approx 0.8 \dots 0.9$ – известный скалярный коэффициент. При

[1] Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа», Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», пр. Победы, 37, Киев, УКРАИНА, E-mail: yuriy.milyavsky@gmail.com

этом, согласно [2], на выходе фильтра (5) преобладают низкочастотные составляющие с ненулевым средним. Тогда с учетом модели (1) условное математическое ожидание для составляющих невязки соотношений (4) можно записать в виде

$$M_{j-1}\{e_i(jh)\} = S_i M_{j-1}\{Y_i(jh)\} - b_i = S_i\{-a_{1_i} Y_i\left[(j-1)h\right] - \\ -\ldots - a_{s_i} Y_i\left[(j-s)h\right] + (c_{0_{i1}} g^m + c_{1_{i1}} g^{m-1} + \ldots + c_{m-1_{i1}} g + \\ + c_{m_{i1}})\xi_1\left[jh - mT_0\right] + c_{m+1_{i1}}\xi_1\left[jh-(m+1)T_0\right] + \\ + \ldots + c_{q_{i1}}\xi_1\left[jh - qT_0\right] + (c_{0_{i2}} g^m + c_{1_{i2}} g^{m-1} + \ldots + c_{m-1_{i2}} g + \\ + c_{m_{i2}})\xi_2\left[jh - mT_0\right] + c_{m+1_{i2}}\xi_2\left[jh-(m+1)T_0\right] + \ldots + \\ c_{q_{i2}}\xi_2\left[jh - qT_0\right] + \ldots + (c_{0_{in}} g^m + c_{1_{in}} g^{m-1} + \ldots + c_{m-1_{in}} g + \\ + c_{m_{in}})\xi_n\left[jh - mT_0\right] + c_{m+1_{in}}\xi_n\left[jh-(m+1)T_0\right] + \\ + \ldots + c_{q_{in}}\xi_n\left[jh - qT_0\right] + a_{0_i}\} - b_i .$$

Выборочное условное математическое ожидание невязки соотношения e_i на протяжении «окна» ph:

$$\frac{1}{p}\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{j-1}\{e_i(jh)\} = \frac{1}{p} S_i \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{j-1}\{Y(jh)\} - b_i . \quad (6)$$

Выборочная условная дисперсия на интервале ph для $\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}$, $i = 1,2,\ldots,l$:

$$\operatorname{var}_p\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{p}\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left\{e_i(jh) - \frac{1}{p}\sum_{\mu=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{\mu-1}\{e_i(\mu h)\}\right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left\{S_i\left[Y(jh) - \frac{1}{p}\sum_{\mu=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{\mu-1}\{Y(\mu h)\}\right]\right\}^2 . \quad (7)$$

На основе выражений (6), (7) определяется максимальная выборочная условная дисперсия при изменении p в интервале $1 \le p \le p_{\max}$:

$$\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \max_{1\le p\le p_{\max}} \operatorname{var}_p\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}, \quad (8)$$

где $p_{\max}$ устанавливается исходя из инерционности процесса, $i = 1,2,\ldots,l$. [1]

Прогнозирование максимальных выборочных условных дисперсий невязки соотношений производится на основе построения обобщенной авторегрессионной условно гетероскедастической модели (GARCH) для каждой составляющей невязки e_i согласно методики [1]:

$$\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \lambda_i + \sigma_{1i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \\ \sigma_{2i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] + \ldots + \sigma_{r_i i}\bar{\bar{\xi}}^2_{i_{\max}}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-r_i\right)h\right] + \\ + w_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \rho_{1i} w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \ldots + \\ + \rho_{t_i i} w_i\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-t_i\right)h\right], \quad (9)$$

где w_i — процессы дискретного белого шума с нулевым средним. На основе уравнения (9) выполняется прогнозирование максимальной выборочной условной дисперсии (8) на один большой период квантования $h = mT_0$. Адаптивная настройка модели GARCH (9) выполняется на основе рекуррентного метода наименьших квадратов [1].

Компьютерное моделирование, проведенное авторами в среде MatLab 7.4, подтвердило полученные результаты.

Итак, с помощью предложенной методики можно с достаточной точностью прогнозировать максимальную условную дисперсию невязки соотношения на большой период дискретизации. Применение разнотемповой дискретизации позволяет увеличить горизонт прогнозирования без существенной потери точности. Использование максимальных выборочных вместо традиционных условных дисперсий, с одной стороны, повышает корреляцию между соседними отсчетами (следовательно, улучшает качество прогнозирования), а с другой стороны, дает практически более значимую информацию о дисперсии невязки соотношения, т.к. позволяет прогнозировать "наихудший" случай (с максимальной волатильностью).

Список литературы

[1] Романенко В.Д., Милявский Ю.Л. Прогнозирование максимальных условных дисперсий многомерных процессов с разнотемповой дискретизацией на основе моделей GARCH // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. - № 4. – С. 92 - 108.

[2] Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.