УДК 62-50

Существование и устойчивость наклонных положений равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса

А.М. Ковалев[1], В.Н. Неспирный[1], В.А. Королев[1]

Аннотация – **For a pendulum with vibrated suspended point, conditions of the equilibrium of an inclined state is obtained. It is shown that only in vertical states exact equilibrium is possible under any bounded motion of a suspended point. Control laws providing harmonic oscillations about fixed inclined state with small amplitude are designed.**

Ключевые слова – **Математический маятник, подвижная точка подвеса, импульсное управление.**

Задачу о перевернутом маятнике с вибрирующей точкой подвеса называют задачей Капицы. В его работах [1, 2] теоретически обосновано, что, при больших частотах вертикальных колебаний точки подвеса, маятник становится устойчивым в своем верхнем положении. Им была также предложена механическая конструкция для демонстрации описанного эффекта. Однако, еще задолго до Капицы в 1908 году английский математик A. Stephenson также рассматривал похожую задачу [3]. Им было показано, что достаточно просто удерживать шест в вертикальном положении, вибрируя точку опоры по вертикали, а не перемещая ее из стороны в сторону, как это обычно делают, в горизонтальной плоскости. Анализ устойчивости верхнего положения маятника при колебаниях точки подвеса вдоль произвольно выбранной оси был выполнен И.Г. Малкиным [4]. Следует отметить также еще более ранний результат [5] о потере устойчивости нижнего положения равновесия при горизонтальных колебаниях подвеса с определенной частотой. Более сложные траектории были предложены в были предложены в монографиях [6, 7], где рассматривались перемещения не только по вертикали или вдоль наклонной прямой, но также и эллиптические траектории. При этом в работе [6] на основе методов усреднения был разработан аппарат вибрационной механики для исследования колебательных систем, а также введено понятие квазиравновесия колебательных систем, обозначающее стационарность медленной составляющей решения таких систем. При этом у маятника, кроме верхнего и нижнего положения равновесия, были найдены также наклонные квазиравновесные состояния.

Данная работа посвящена исследованию возможности с помощью управления движением точки подвеса обеспечить равновесие математического маятника в произвольном наперед заданном наклонном положении либо колебание со сколь угодно малой амплитудой относительно выбранного положения маятника.

Рассматривается плоское движение математического маятника, состоящего из материальной точки массы m и невесомого нерастяжимого стержня длины l, на котором подвешена эта точка, в поле силы тяжести (рис. 1). При этом точка подвеса стержня не закреплена, а может двигаться по некоторой (заданной или выбираемой) траектории. Предполагается отсутствие каких-либо сил трения и сопротивления. Положение маятника будем определять углом φ между стержнем и осью, сонаправленной с вектором силы тяжести. Пусть задано некоторое положение маятника $\varphi_0 \in (-\pi,\pi]$, в котором он находится в начальный момент с нулевой угловой скоростью. Задача состоит в нахождении закона движения точки подвеса $(x(t), y(t))$, не позволяющего маятнику изменять положение с течением времени, т.е. обеспечить существование решения $\varphi(t) = \varphi_0$.

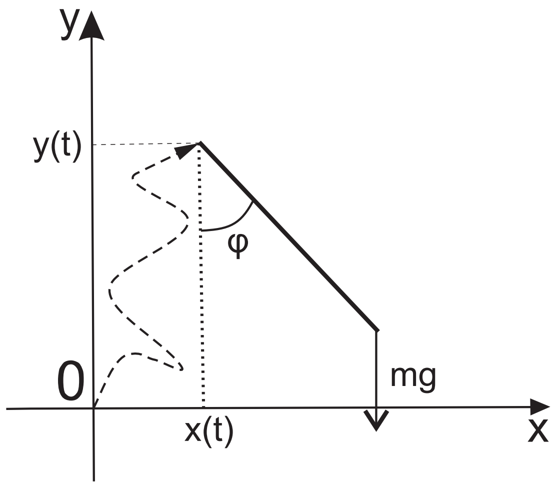

Рис.1. Математический маятник с подвижной точкой подвеса

Уравнение движения такого маятника может быть представлено в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)\ddot{x}(t) + \sin(\varphi)\ddot{y}(t)}{l} = 0. \quad (1)$$

Важный частный случай возникает, когда точка подвеса колеблется вдоль некоторой оси, образующей угол α с направлением силы тяжести. Обозначив смещение точки подвеса вдоль этой оси s(t), имеем

$$x(t) = s(t)\sin\alpha\,,\ \ y(t) = -s(t)\cos\alpha\,, \qquad (2)$$

и уравнение (1) преобразуется к виду

[1] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, ул. Р. Люксембург, 74, Донецк, 83114, УКРАЇНА, E-mail: kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin(\varphi)-\frac{\ddot{s}}{l}\sin(\varphi-\alpha)=0\,. \qquad (3)$$

Один из наиболее важных результатов работы заключается в том, что при любом ограниченном движении подвеса точными равновесными состояниями маятника могут быть лишь вертикальные (верхнее и нижнее) положения, которые существуют и при неподвижной точке подвеса. Этот результат сохраняет силу не только в том случае, когда в качестве допустимых законов движения подвеса рассматриваются непрерыно-дифференцируемые, но также и для имеющих разрывы по скорости, что механически означает импульсные воздействия в соответствующие моменты времени [8]. Объясняется это тем, что в случае точного равновесия уравнение (1) имеет интеграл

$$x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0=-\frac{gt^2}{2}\sin\varphi_0+c_1t+c_2\,,$$

где константы c_1 и c_2 определяются начальными положением и скоростью точки подвеса. Выражение, записанное в левой части, определяет проекцию положения точки подвеса на ось, перпендикулярную стержню маятника. Так как при импульсных воздействиях интегралы сохраняются, а время воздействия пренебрежимо мало, то возможно осуществить лишь такие мгновенные перемещения подвеса, которые не изменяют величину проекции. С течением же времени эта координата с необходимостью будет убывать, чтобы обеспечить равновесие. Без требования же ограниченности можно обеспечить равновесие произвольного положения.

Поскольку точного равновесия маятника в наклонном положении невозможно добиться ограниченным управлением, решается задача о реализации режим управления, при котором маятник будет совершать малые колебания относительно заданного положения. В работе [6] движение колебательной системы, подверженной некоторому вибрационному воздействию, рассматривается как сумма медленной (которая получается усреднением воздействия по периоду) и быстрой составляющей. Движение, при котором медленная составляющая не изменяется с течением времени, названо квазиравновесием. В данной работе требуем большего. А именно, чтобы за счет выбора управляющего воздействия (движения точки подвеса) максимальное отклонение от данного положения маятника могло быть сделано сколь угодно малым.

Ограничившись лишь прямолинейным движением точки подвеса (2), ищется закон управления s(t), обеспечивающий гармонические колебания маятника относительно выбранного положения φ_0 с частотой Ω и амплитудой ε:

$$\varphi(t)=\varphi_0+\varepsilon\cos(\Omega t+\delta) \qquad (4)$$

Возможность построения такого управления следует из следующей теоремы.

Теорема. [9] Пусть начальное положение маятника $\varphi_0\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ и направление колебаний подвеса α связаны неравенством $\sin\varphi_0\,\mathrm{ctg}\,(\varphi_0-\alpha)<0$. Тогда при любом достаточно малом максимальном отклонении ε от начального положения φ_0, существует частота колебаний маятника Ω такая, что реализуется режим (4). При этом движение точки подвеса s(t) будет непрерывным и периодическим (а значит и ограниченным).

В работе предложен метод построения управлений, обеспечивающих режим квазиравновесия в заданном наклонном положении, для ряда примеров маятников соответствующие управления построены в явном виде. Доказано отсутствие ограниченных решений задачи о точном наклонном равновесии маятника для достаточно широкого класса допустимых движений. Исследована устойчивость колебательных движений маятника, к которым приводят построенные режимы вибрации точки подвеса. Проанализирована зависимость частоты колебаний Ω от максимально допустимого отклонения ε, показано, что частота неограниченно возрастает при уменьшении амплитуды колебаний.

Список ссылок

[1] П.Л. Капица "Маятник с вибрирующим подвесом," Успехи физических наук, т.44, С. 7-22, 1951.

[2] П.Л. Капица "Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса," Журнал экспериментальной и технической физики, т. 21, С. 588-607, 1951.

[3] A. Stephenson "On a new type of dynamic stability," Mem. and Proc. of the Manchester Literary and Philosophical Soc., vol. 52, № 8, P. 1-10, 1908.

[4] И.Г. Малкин "Некоторые задачи теории нелинейных колебаний." М.: Гостехиздат, 1956.

[5] Дж.В. Стретт "Теория звука". М.: Гос. изд-во технико-технической литратуры, т. 1, 1955.

[6] И.И. Блехман "Вибрационная механика." М.: Наука, 1994.

[7] Т.Г. Стрижак "Методы исследования динамических систем типа маятник". Алма-Ата: Наука, 1981.

[8] А.М. Ковалев, Н.В. Кравченко, В.Н. Неспирный "Задачи управления и стабилизации динамических систем с импульсным управлением и неголономные механические системы," Автоматика и телемеханика, № 8, С. 163-179, 2007.

[9] В.Н. Неспирный, В.А. Королев "Стабилизация колебаний маятника с подвижной точкой подвеса относительно наклонного равновесия," Механика твердого тела, вып. 39, С. 181-192, 2009.