УДК 517.997

Оптимальный анизотропийный регулятор на основе наблюдателя Люенбергера минимального порядка[1]

М.М. Чайковский[2], А.П. Курдюков[2]

Аннотация – **This paper considers the problem of synthesis of a reduced-order anisotropic optimal controller for the cases when some part of the measured output or the whole vector can be measured precisely. The reduced-order controller is constructed on the base of Luenberger minimum-order state estimator. The controller parameters are defined from a solution to some system of nonlinear matrix algebraic equations.**

Ключевые слова – **Линейные системы, случайные возмущения, норма, анизотропия, оптимизация, регулятор пониженного порядка**

I. Введение

Решение задачи анизотропийной стохастической H_∞ оптимизации многомерной дискретной линейной стационарной системы с помощью оптимального анизотропийного регулятора полного порядка, равного порядку объекта управления, было получено в середине 1990-х годов И.Г. Владимировым и представлено в [1]. Предельными случаями данной задачи являются хорошо известные задачи синтеза линейно-квадратичного гауссовского и H_∞ оптимального регуляторов. Оптимальный анизотропийный регулятор в цепи обратной связи по измеряемому выходу обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы и минимизирует анизотропийную норму [2], [3] ее матричной передаточной функции от внешнего гауссовского случайного возмущения с ограниченной средней анизотропией к управляемому выходу. При этом предполагается, что измеряемый выход объекта управления содержит аддитивную помеху, окрашенный гауссовский шум измерений с ограниченной средней анизотропией.Ранее были предложены подходы к синтезу анизотропийных регуляторов пониженного порядка с помощью редукции моделей объекта управления и регулятора. Однако используемые процедуры редукции приводят к тому, что регулятор пониженного порядка не является оптимальным для объекта управления полного порядка.

В этой работе рассматривается задача синтеза оптимального анизотропийного регулятора для случаев, когда некоторая часть вектора измеряемого выхода объекта, а в пределе и весь вектор измеряется точно. Регулятор пониженного порядка, меньшего, чем порядок объекта управления, строится на основе наблюдателя Люенбергера минимального порядка.

II. Постановка задачи

Модель дискретного линейного стационарного объекта управления $P(z)$ с n-мерным состоянием X, m_1-мерным входом внешнего возмущения W, m_2-мерным входом управления U, p_1-мерным управляемым входом Z и p_2-мерным измеряемым выходом Y имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} -\infty < k < +\infty \\ x_{-\infty} = 0, \end{matrix} \tag{1}$$

где все матрицы имеют согласованные размерности, $p_1 < m_1$,

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

реализация (A, B_2, C_2) является минимальной, $\operatorname{rank} D_{21} = p_2 - r \le p_2$ в общем случае, $D_{21} = 0$ в предельном случае сингулярной задачи фильтрации. Из (1), (2) следует

$$(z_k) = Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 X \\ U \end{bmatrix},$$

$$(y_k) = Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{21}X + D_{12}W \\ C_{22}X \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что входная последовательность W есть многомерная стационарная гауссовская случайная последовательность, уровень средней анизотропии которой не превышает $a \ge 0$, т.е. W производится из m_1-мерного гауссовского белого шума с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей устойчивым формирующим фильтром G из семейства $\mathbf{G}_a = \{G \in H_2^{m_1 \times m_1} : \overline{A}(G) \le a\}$, где

$$\overline{A}(G) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det \frac{m_1 \overline{G}(\omega)\overline{G}(\omega)^*}{\|G\|_2^2} d\omega \tag{3}$$

— функционал средней анизотропии [3],

$$\overline{G}(\omega) = \lim_{r \to 1-} G(re^{i\omega}),\ \omega \in [-\pi, \pi]$$

— граничное значение передаточной функции $G(z)$.

Задача: Для заданного объекта управления (1) и уровня средней анизотропии внешнего возмущения $a \ge 0$ найти строго неупреждающий регулятор K порядка $n_c = n - p_2 + r$, стабилизирующий замкнутую систему

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-08-90436-Укр_а, 11-08-00714-а)

[2] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, РОССИЯ, E-mail: mmtchaikovsky@hotmail.com

$$F(z)=F_L(P,K)=P_{11}+P_{12}K(I_{p_2}-P_{22}K)^{-1}P_{21},$$
$$P_{ij}(z)=\left[\begin{array}{c|c} A & B_j \\ \hline C_i & D_{ij}\end{array}\right],\ i,j=1,2, \qquad (4)$$

и минимизирующий ее a -анизотропийную норму

$$|||F|||_a=\sup_{G\in G_a}\frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}\to\inf_K. \qquad (5)$$

III. Решение

Модель стабилизирующего регулятора K с состоянием $H\in R^{n_c}$, $n_c=n-p_2+r$, имеет вид

$$\begin{bmatrix}h_{k+1}\\ u_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_c & B_c\\ C_c & D_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_k\\ y_k\end{bmatrix},\quad \begin{array}{c}-\infty<k<+\infty\\ h_{-\infty}=0.\end{array} \qquad (6)$$

Решение задачи синтеза устанавливается следующей теоремой.

Теорема: Пусть реализация (A,B_2,C_2) объекта управления (1) является минимальной. Тогда для любого заданного уровня средней анизотропии $a\ge 0$ внешнего возмущения W матрицы реализации оптимального анизотропийного регулятора (6), являющегося решением задачи (5), имеют вид

$$\left.\begin{array}{l}A_c=T(\overline{A}-\Phi\overline{C}_{21}+B_2K)\Theta-T\Phi D_{21}L_2\\ B_c=\left[T\Phi\quad T(\overline{A}-\Phi\overline{C}_{21}+B_2K)\Psi\right]\\ C_c=K\Theta\\ D_c=\left[0\quad K\Psi\right]\end{array}\right\}, \qquad (7)$$

где

$$\overline{A}=A+B_1(L_1+L_2T),\quad \overline{C}_{21}=C_{21}+D_{21}(L_1+L_2T),$$
$$\Phi=\overline{A}S\overline{C}_{21}^T(\overline{C}_{21}S\overline{C}_{21}^T+D_{21}\Sigma D_{21}^T),\quad \Psi=\overline{S}C_{22}^T(C_{22}\overline{S}C_{22}^T)^{-1},$$
$$\Theta=\begin{bmatrix}C_{22}\\ T\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ I_{n-r}\end{bmatrix},\quad T:\ T\Psi=0,\ \operatorname{rank}T=n-r,$$
$$K=-(B_2^TMB_2+I_{m_2})^{-1}B_2^TM\overline{A},$$

и определяются из решения $(q,R,P_{cl},\overline{S},S,M)$, $q\in[0,\|F\|_\infty^{-2})$, $R,P_{cl},\overline{S},S,M\ge 0$, системы перекрестно-связанных нелинейных матричных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l}R=A_{cl}^TRA_{cl}+qC_{cl}^TC_{cl}+L^T\Sigma^{-1}L\\ \Sigma=(I_{m_1}-B_{cl}^TRB_{cl})^{-1}\\ L=\left[L_1\quad L_2\right]=\Sigma B_{cl}^TRA_{cl}\end{array}\right\}, \qquad (8)$$

$$P_{cl}=(A_{cl}+B_{cl}L)P_{cl}(A_{cl}+B_{cl}L)^T+B_{cl}\Sigma B_{cl}^T, \qquad (9)$$

$$-\frac{1}{2}\ln\det\frac{m\Sigma}{\operatorname{tr}(LP_{cl}L^T+\Sigma)}=a, \qquad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{S}=\overline{A}S\overline{A}^T-\\ \quad-\overline{A}S\overline{C}_{21}^T(\overline{C}_{21}S\overline{C}_{21}^T+D_{21}\Sigma D_{21}^T)^{-1}\overline{C}_{21}S\overline{A}^T+B_1\Sigma B_1^T\\ S=\overline{S}-\overline{S}C_{22}^T(C_{22}\overline{S}C_{22}^T)^{-1}C_{22}\overline{S}\end{array}\right\}, \qquad (11)$$

$$M=\overline{A}^TM\overline{A}-\overline{A}^TMB_2(B_2^TMB_2+I_{m_2})^{-1}B_2^TM\overline{A}+C_2^TC_2, \qquad (12)$$

где A_{cl},B_{cl},C_{cl} — матрицы реализации замкнутой системы.

IV. Заключение

Анизотропийное стохастическое управление является эффективным и важным в случаях, когда несоответствие между законом распределения внешних случайных возмущений и шумов измерений и его номинальной моделью может ухудшить качество системы, если метод синтеза регулятора основан на точном знании закона распределения. Применение анизотропийного подхода позволяет синтезировать регуляторы, которые являются менее консервативными, чем H_∞ регуляторы, и более эффективными в подавлении окрашенных случайных возмущений, чем линейно-квадратичные гауссовские регуляторы. В частном случае, когда часть измеряемого выхода объекта не содержит случайных помех, возможно получить оптимальный анизотропийный регулятор пониженного порядка на основе наблюдателя Люенбергера минимального порядка. Возможность понижения порядка регулятора ограничена, можно понизить порядок регулятора на $r\le p_2$ до $n_c=n-p_2+r$. Решение задачи сводится к решению сложной системы перекрестно-связанных нелинейных матричных алгебраических уравнений, которая не может быть решена известными стандартными вычислительными методами.

Список ссылок

[1] I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, and A.V. Semyonov, "State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞-optimization problem," in *13th IFAC World Congress*, San-Francisco, California, pp. 427-432, 1996.

[2] I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, and A.V. Semyonov, "On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems," in *13th IFAC World Congress*, San-Francisco, California, pp. 179-184, 1996.

[3] P. Diamond, I.G. Vladimirov, A.P. Kurdyukov, and A.V. Semyonov, "Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems," *Int. J. of Contr.*, V. 74, pp. 28-42, 2001.