УДК 004.272.2

Розробка програмного забезпечення з застосування Message Passing Interface для розв'язування задач методом скінченних елементів

Гаркуша О. В., бакалавр, студентка каф. КТ
Бердник М. Г., к.ф.-м.н., доц. каф. КТ

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
(вул. Карла Маркса, 35, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна)

Одним з розповсюджених у наш час методів розв'язання задач математичної фізики, яких дозволяє ефективно розв'язати дану проблему, є метод скінченних елементів. Даний метод являє собою ефективний чисельний метод розв'язання інженерних та фізичних задач. Широке використання цього методу в значній мірі пояснюється простотою фізичної інтерпретації основних його обчислюваних операцій, великою геометричною гнучкістю та застосуванням до широкого класу рівнянь в частинних похідних.

Одним з типів задач, для яких застосовується метод скінченних елементів, є задачі теплопровідності. В багатьох інженерних задачах важливим аспектом є знання розподілу температури в тілі. Кількість тепла, яка підводиться до тіла або яку воно втрачає, може бути обчислене, якщо відомо розподілення температури.

Задачу теплопровідності запишемо у вигляді [1]:

$$\left(K_{xx}\frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial y^2}+K_{zz}\frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial z^2}\right)+Q=0 \tag{1}$$

$$T(x,y)|_S=T_f \tag{2}$$

$$\left(K_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}l_x+K_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}l_y+K_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}l_z\right)+q+h\big(T(x,y,z)-T_f\big)=0 \tag{3}$$

K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} - коефіцієнти теплопровідності матеріалу, h - коефіцієнт теплообміну матеріалу, T_f – температура навколишньої середи, l_x, l_y, l_z - направляючі косинуси вектора зовнішньої нормалі до граничної поверхні, S – гранична поверхня, на якій відома температура, $T(x,y,z)$ – значення температури в точці (x,y,z), яке необхідно знайти.

Дана задача може мати крайові умови першого роду (2) або третього роду (3).

Розв'язання рівняння (1) з крайовими умовами (3) можна замінити задачею пошуку мінімума функціонала:

$$\Phi(T)=\int_V \frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+K_{yy}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+K_{zz}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2-2QT\right]dV+\int_S\left[qT+\frac{1}{2}h\big(T(x,y,z)-T_f\big)^2\right]dS \tag{4}$$

Поставлену задачу розв'яжемо методом скінчених елементів. Оберемо довільний трикутний елемент з номером е. Позначимо його вершини через *i, j* та *k*.

Кожному вузлу поставимо у відповідність функцію форми:

$$N_m^{(e)}=\frac{1}{2A}(a_m+b_m x+c_m y)\ m=i,j,k \tag{5}$$

А – площа елементу.

Тоді температуру в межах трикутника можна визначити за допомогою функцій форм та значень температури T_i, T_j, T_k у вузлах трикутника:

$$T^{(e)} = N_i^{(e)} T_i + N_j^{(e)} T_j + N_k^{(e)} T_k \quad (6)$$

Функціонал (4) можна представити у вигляді суми функціоналів $\Phi^{(e)}(T)$, кожен з яких відображує вклад у функціонал (4) елемента з номером е:

$$\Phi(T) = \sum_{e=0}^{N_e} \Phi^{(e)}(T) \quad (7)$$

Мінімум функціонала (4) знаходимо з умови:

$$\frac{\partial \Phi(T)}{\partial \{T\}} = \sum_{e=0}^{N_e} \frac{\partial \Phi^{(e)}(T)}{\partial \{T\}} = \{0\} \quad (8)$$

Функціонал $\Phi^{(e)}(T)$ можна представити у вигляді:

$$\Phi^{(e)}(T) = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T^{(e)}\}^T [B]^T [\lambda][B] \{T^{(e)}\} dV - \int_{V^{(e)}} Q \{T^{(e)}\} dV + \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2} h\left(T^2 - 2TT_f + T_f^2\right) dS + \int_{S^{(e)}} q \{T^{(e)}\} dS dS \quad (9)$$

T - глобальний вектор температур, $[B]$ - матриця градієнтів для функції форми (4), яка має вигляд $\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$, $[\lambda]$=$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Продиференціюємо функціонал (9). З формули (8) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$k^{(e)} \{T^{(e)}\} = f^{(e)} \quad (10)$$

$$k^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [B]^T [\lambda][B] dV + \int_{S^{(e)}} h [N]^T [N] dS \quad (11)$$

$$f^{(e)} = -\int_{V^{(e)}} Q [N]^T dV + \int_{S^{(e)}} q [N]^T dS - \int_{S^{(e)}} h T_f [N]^T dS \quad (12)$$

Для розв’язання задачі теплообміну методом скінченних елементів була розроблена програма на мові С, яка дозволяє отримати систему (10) автоматично з урахуванням заданих параметрів.

При великій кількості вузлових елементів система (10) має велику розмірність, що ускладнює її розв’язання та значно збільшує час обчислення. Для покращення швидкісних показників розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь були розроблені паралельні алгоритми, які дозволяють ефективно розподіляти навантаження між декількома процесами.

Використовуючи MPI та мову програмування С за допомогою бібліотеки MPICH2 було створено програмно-математичне забезпечення, яке реалізує стабілізований метод біспряжених градієнтів [2]. Він ефективно розпаралелюється, забезпечуючи відчутний приріст у швидкості рішення рівнянь.

Стабілізований метод біспряжених градієнтів може бути застосований для більшості систем рівнянь, завжди дає точне рішення(якщо не враховувати машинну помилку). Недоліком цього методу є те, що вихідна матриця повинна бути добре обумовленою, але метод припускає використання передобумовлювачів для погано обумовлених систем. Даний метод при розпаралелюванні показав себе ефективним.

Метод BiCGStab містить п'ятнадцять операцій, з них три операції, які не підлягають розпаралелюванню. Таким чином теоретичне прискорення за законом Амдала дорівнює: $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{s}}{0{,}2 \cdot \mathrm{s} + 0{,}8}$ (s-кількість процесів).

1. Сигерлинд Л. «Применение метода конечных элементов» Изд «Мир»,1976. – 393 с
2. IX міжнародна науково-практична конференція MPZIS – 2011 Гаркуша О.В., Бердник М.Г. «Програмне забезпечення розв’язання систем алгебраїчних рівнянь з застосуванням Message Passing Interface».