УДК 697.92

В.М. Желих, Н.А. Сподинюк
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теплогазопостачання і вентиляції

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛООБМІНУ НА ПОВЕРХНІ ІНФРАЧЕРВОНОГО НАГРІВАЧА

Запропоновано математичну модель процесів теплообміну на поверхні інфрачервоного нагрівача під час його застосування щодо вирощування птиці. Вона дає змогу визначити температуру на поверхні випромінювача та відображає розподіл теплоти по його площі.

Ключові слова: інфрачервоне опалення, граничні умови, температура поверхні.

A mathematical model of heat transfer on the surface of an infrared heater in its application during poultry breeding. It allows you to determine the temperature at the radiator surface and reflects the distribution of heat in its area.

Key words: infrared heating, boundary conditions, surface temperature.

Вступ. Використання інфрачервоного опалення дає змогу забезпечити необхідний температурний режим у місцях розміщення птиці. Важливим є правильне проектування систем інфрачервоного опалення з врахуванням методик розрахунку, що ґрунтуються на моделюванні процесів теплообміну на нагрітих поверхнях. У [1–3] наведені результати теплового моделювання тіл різної форми та нагрітих поверхонь.

Температура на поверхні інфрачервоного нагрівача істотно впливає на перебіг процесів теплообміну. Тому моделювання розподілу температур на поверхні інфрачервоного нагрівача у стаціонарних умовах є актуальним завданням.

Комфортні умови вирощування птиці із застосуванням інфрачервоних випромінювачів залежать від рівномірного розподілу температур по усій площі нагрівача. За допомого алюмінієвого профілю, що є елементом конструкції випромінювача, здійснюється рівномірний розподіл теплового потоку по його поверхні.

Мета дослідження. Мета роботи – дослідити розподіл температури на поверхні інфрачервоного нагрівача шляхом математичного моделювання за рівнянням Лапласа.

Методика моделювання. Розглянуто процес теплопровідності по площі інфрачервоного нагрівача, зумовлений нагріванням поверхні випромінювання. У результаті проведеного аналізу можна отримати розподіл температури по поверхні нагрівача.

Нехай температурне поле випромінювача має вигляд $\Delta t = f(x, y)$, температура по товщині нагрівача у напрямку осі z в усіх точках має одне і те саме значення. Рівняння Лапласа для цієї задачі в надлишкових температурах набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \Delta t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta t}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

де Δt – шукана надлишкова температура поверхні, ºС.

У задачах, пов'язаних з теплопередачею, двовимірне рівняння Лапласа описує стаціонарний розподіл стану температури $\Delta t = f(x, y)$ в площині xy. Розв'язання задачі потребує наявності граничних умов для двох незалежних змінних x та y.

Рівняння Лапласа розв'язується у прямокутній області, так що $0<x<L$, $0<y<H$, де L – довжина нагрівача, H – висота нагрівача. Тому відповідний набір граничних умов може бути:

$$\Delta t=f(x, 0)=0,\ \Delta t=f(x, H)=f(x),\ \Delta t=f(0, y)=0,\ \Delta t=f(L, y)=0.$$

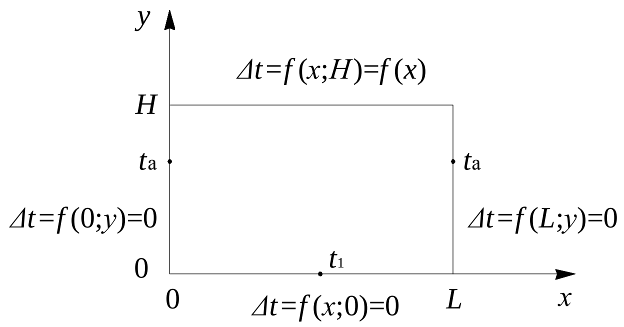

Рис. 1. Визначення граничних умов для незалежних змінних x та y

За методом розподілу змінних шукаємо розв'язок рівняння у вигляді

$$\Delta t = f(x,y) = X(x)Y(y), \tag{2}$$

де $X(x)$ – функція тільки змінної x; $Y(y)$ – функція тільки змінної y.

Розв'язок рівняння поділом змінних відбувається у такому вигляді:

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Після почленного ділення на $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Оскільки ліва частина рівняння не залежить від y, а права частина не залежить від x, то загальне значення рівняння не залежить ні від y, ні від x. Загальне значення зводиться до сталої величини λ^2. Рівняння (4) розпадається на два звичайні диференціальні рівняння:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 X(x) = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \lambda^2 Y(y) = 0. \tag{6}$$

Розв'язком першого диференціального рівняння є:

$$X = C_1 e^{i\lambda x} + C_2 e^{-i\lambda x}, \tag{7}$$

де C_1 і C_2 – довільні константи.

Проте вирази $e^{i\lambda x}$ і $e^{-i\lambda x}$ мають дійсні значення лише за $x = 0$. Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{\pm i\lambda x} = \cos\lambda x \pm i\sin\lambda x, \tag{8}$$

можна подати (7) у вигляді:

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x. \tag{9}$$

Розв'язком другого диференціального рівняння є:

$$Y = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}, \tag{10}$$

де C і D – довільні сталі величини.

Тепер можна записати загальне рівняння для розв'язку конкретної задачі:

$$\Delta t = XY = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}). \tag{11}$$

Для визначення величин λ; A; B; C; D використовувались граничні умови: $\Delta t = 0$ та x=0. Звідки випливає:

$$\Delta t(0,y) = A(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) = 0. \tag{12}$$

Вираз, що знаходиться у дужках, може мати довільне значення, зокрема він не обов'язково повинен дорівнювати нулю. Отже, єдина можливість задовольнити граничну умову за x=0 є прийняття A=0. Отже:

$$\Delta t(0,y) = B\sin\lambda x(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}). \tag{13}$$

З граничної умови $\Delta t = 0$ за x=L випливає:

$$\Delta t(L, y) = B \sin \lambda x (Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) = 0. \tag{14}$$

За умови, що вираз у дужках не обов'язково повинен дорівнювати нулю, а також, що B≠0, інакше функція $\Delta t(x, y)$ тотожно дорівнюватиме нулю, випливає:

$$\sin \lambda L = 0. \tag{15}$$

А це можливо лише за умови $\lambda L = i\pi$, де i=1; 2; 3… – натуральні числа. Отже:

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{L}. \tag{16}$$

Частковий розв'язок рівняння (для конкретного значення i) матиме такий вигляд:

$$\Delta t_i(x, y) = B_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right)(C_i e^{\frac{i\pi}{L} y} + D_i e^{-\frac{i\pi}{L} y}). \tag{17}$$

Запишемо цей вираз для y=0, де за граничних умов $\Delta t = 0$:

$$\Delta t_i(x, 0) = B_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right)(C_i e^{\frac{i\pi}{L} 0} + D_i e^{-\frac{i\pi}{L} 0}) = B_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right)(C_i + D_i) = 0. \tag{18}$$

З умови B≠0 випливає, що $(C_i + D_i) = 0$, або $D_i = -C_i$. Отже:

$$\Delta t_i(x, y) = B_i C_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right)(e^{\frac{i\pi}{L} y} - e^{-\frac{i\pi}{L} y}) = 2B_i C_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \mathrm{sh}\left(\frac{i\pi}{L} y\right) = E_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \mathrm{sh}\left(\frac{i\pi}{L} y\right).$$

Загальний розв'язок має вигляд суми часткових розв'язків, отже:

$$\Delta t(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \mathrm{sh}\left(\frac{i\pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right). \tag{19}$$

Для визначення константи E_i використовувалась четверта гранична умова: $\Delta t(x, H) = f(x)$. Вигляд функції $f(x)$ має бути заданим. При цьому вона повинна бути такою, щоб її значення за x=0 та x=L дорівнювали нулю, інакше температурне поле на границі розрахункової області буде розривним.

Функцію $f(x)$ розкладено у ряд Фур'є за синусами:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right). \tag{20}$$

Константа a_i визначається за такою формулою:

$$a_i = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) dx. \tag{21}$$

Отже:

$$\Delta t(x, H) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \mathrm{sh}\left(\frac{i\pi}{L} H\right) \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right),$$

звідки $E_i \mathrm{sh}\left(\frac{i\pi}{L} H\right) = a_i$, або $E_i = \dfrac{a_i}{\mathrm{sh}\left(\frac{i\pi}{L} H\right)}$.

За умови y=H і з врахуванням граничних розмірів пластини x=[0…0,6 м] функція $f(x)$ матиме такий вигляд:

$$\Delta t(x, H) = 30x - 50x^2. \tag{22}$$

Використовуючи рівняння (22) з наведеними вище граничними умовами, отримано розподіл температури вздовж осі x на поверхні нагрівача (рис. 2).

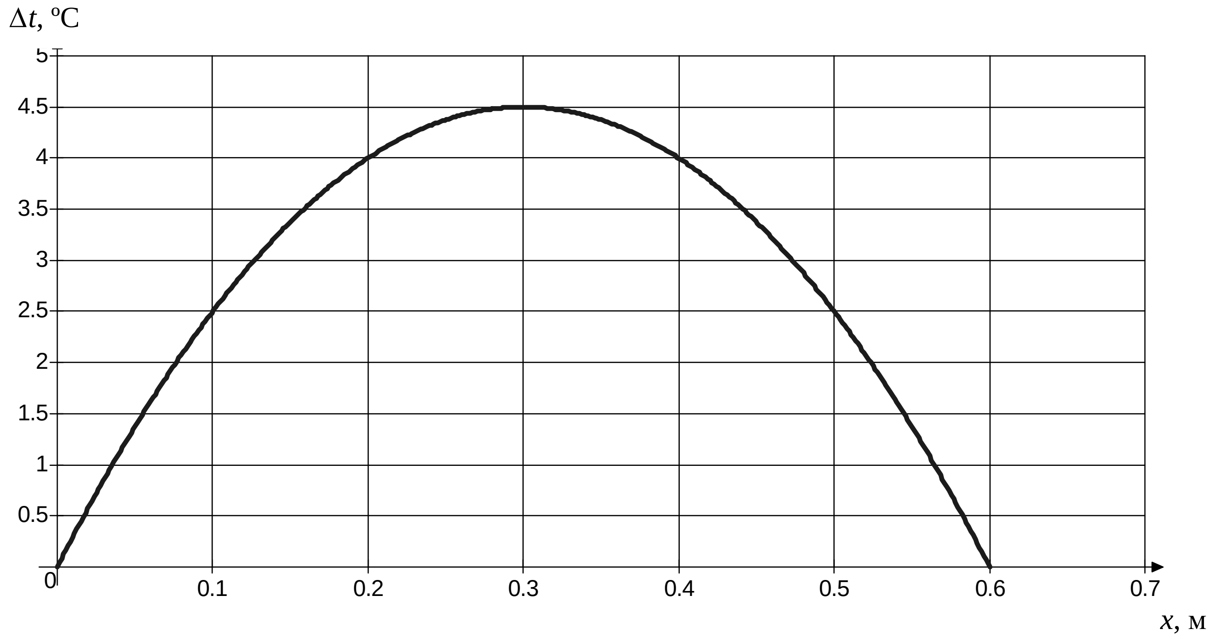

Рис. 2. Зміна температури по поверхні нагрівача вздовж осі x за умови y=H

Як бачимо з цього рисунка, розподіл температури вздовж осі х на поверхні нагрівача має нерівномірний характер, хоча температура на поверхні знаходиться у допустимих межах, відповідно до заданих граничних умов, і змінюється по осі х з перепадом не більше 4,5 °С.

Висновки. Розглянуто основні особливості процесів теплообміну на поверхні інфрачервоного нагрівача.

Побудовано розподіл температури по поверхні нагрівача за двовимірним рівнянням Лапласа.

Моделювання відповідно до наведених граничних умов дало змогу визначити, що зміна температури по поверхні випромінювача не перевищує 4,5 °С. Отже, можна констатувати, що за такого перепаду здійснюється рівномірний тепловий потік від інфрачервоного нагрівача в зону опромінення.

1. King J.R. Energy Metabolism. Thermoregulation and Body Temperature, v. 2. Comparative Physiology of Birds, edited by Marshall / J.R. King, D.S. Farner, 1981. – P. 215 – 287. 2. Сподинюк Н.А. Визначення температури повітря над поверхнею опромінення при інфрачервоному опаленні приміщень пташників // Нова тема: Асоціація інженерів енергоефективних технологій України. – К.: КНУБА. – 2010. – №2. – С. 29 – 31. 3. Худенко А.А. Теплове моделювання стосовно живих організмів / А.А. Худенко // Вентиляція, освітлення на теплогазопостачання: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 6. – С. 34–38.