УДК 517.958:532.72

Математичне моделювання нестаціонарних процесів конвекції-дифузії в регулярних структурах

Дмитрук В. А.[1,2], зав. лаб. ІТ
Чернуха О. Ю.[2], д.т.н., ст.н.с, зав. відділом

[1] Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)
[2] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Дж. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна)

Розвиток таких галузей промисловості як космонавтика, атомна енергетика, а також необхідність ліквідації наслідків масштабних аварій на АЕС, спричинили підвищений інтерес до моделювання процесів перенесення у структурно неоднорідних твердих тілах для встановлення нових зв’язків будови тіла та його якісних характеристик, отримання нових композитних матеріалів з наперед заданими властивостями. Зокрема, представляють особливий інтерес точні розв’язки конкретних контактно-крайових задач нестаціонарних процесів перенесення для кусково-однорідних систем. Для побудови точних аналітичних розв’язків таких задач узагальнено метод [1], який базується на використанні інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях.

Розглянуто дифузію домішки у двофазному шарі товщини x_0, який складається з періодично розташованих областей двох типів, з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ. Поверхні, що обмежують контактуючі області, перпендикулярні до поверхонь шару (вісь Ox перпендикулярна до поверхонь тіла, Oy - до поверхонь складових областей). При цьому області з коефіцієнтом дифузії D_1 мають ширину $2L$, а з D_2 - $2l$, крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії D_1 масоперенос відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом з коефіцієнтом конвективного перенесення v. Врахувавши умови симетрії, виділено елемент тіла, на бічних поверхнях якого потоки дорівнюють нулю.

Концентрації домішкової речовини $c_i(x,y,t)$ в областях Ω_i визначаються з рівнянь

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1\left[\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2}\right] - v\frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad x, y \in \Omega_1 =]0; x_0[\times]0; L[\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2\left[\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2}\right], \quad x, y \in \Omega_2 =]0; x_0[\times]L; L+l[\,. \tag{2}$$

Прийнято такі крайові умови:

$$c_i(x,y,t)\big|_{t=0} = 0\,, \quad c_1(x,y,t)\big|_{x=0} = c_0^{(1)} \equiv \text{const}\,, \quad c_2(x,y,t)\big|_{x=0} = c_0^{(2)} \equiv \text{const}\,, \tag{3}$$

$$c_1\big|_{x=x_0} = c_2\big|_{x=x_0} = 0\,, \qquad \partial c_1/\partial y\big|_{y=0} = 0\,, \qquad \partial c_2/\partial y\big|_{y=L+l} = 0\,. \tag{4}$$

На міжфазній границі накладено умову неідеального контакту:

$$\eta_1 c_1(x,y,t)\big|_{y=L} = \eta_2 c_2(x,y,t)\big|_{y=L}\,, \quad D_1\left.\frac{\partial c_1(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=L} = D_2\left.\frac{\partial c_2(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=L}\,, \tag{5}$$

де $y = L$ - поверхня контакту областей, η_1 і η_2 - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях Ω_1 і Ω_2 відповідно.

Доозначивши похідні від шуканих функцій на границі контакту з урахуванням другої умови (5), та застосувавши відповідні інтегральні перетворення до крайових задач (1), (3)-(5) і (2)-(5), тобто окремо в областях Ω_1 і Ω_2, отримано розв'язок задачі у вигляді:

$$c_1(x,y,t) = c_0^{(1)} e^{v_D x} \frac{\operatorname{sh} v_D (x_0 - x)}{\operatorname{sh}(v_D x_0)} + \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left[-\frac{c_0^{(1)} x_n}{v_D^2 + x_n^2} e^{-D_1 \left(v_D^2 + x_n^2\right) t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L} \int_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{g}_n(t') e^{-D_1 \left(v_D^2 + x_n^2\right)(t-t')} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1 y_k^2 (t-t')} \right) \right\} dt' \right],$$

$$c_2(x,y,t) = c_0^{(2)} \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) - \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) e^{-D_2 x_m^2 t} \left\{ \frac{c_0^{(2)}}{x_m} + \frac{1}{l} \int_0^t \bar{g}_m(t') e^{D_2 x_m^2 t'} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos\left(y_j (y - L)\right) e^{-D_2 y_j^2 (t-t')} \right) dt' \right].$$

Функції $\bar{g}_n(t')$ та $\bar{g}_m(t')$ визначено з умови стрибка концентрації на границі контакту:

$$\bar{g}_n(t') = \frac{ -\frac{\eta_1}{\eta_2} D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{2}{x_0} D_2 c_0^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} x_m B_{n,m} E x_{n,m}(t - t') }{ \frac{\eta_1}{\eta_2 L} \Theta_3 \left(0, \exp\left\{ -D_1 \frac{\pi^2}{L^2} (t - t') \right\} \right) + \frac{4}{x_0^2 l} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi y_m(t, t', y) A_{n,m} B_{n,m} e^{D_1 \left(v_D^2 + x_n^2\right)(t - t')} },$$

$$\bar{g}_m(t') = \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \bar{g}_n(t'), \qquad g(x,t) = \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n(t') \sin(x_n x). \tag{6}$$

Проведено числовий аналіз отриманих розв'язків. Розрахунки виконано в природних безрозмірних змінних τ, ξ, ζ [1]. На рис.1 наведені характерні розподіли функції (6).

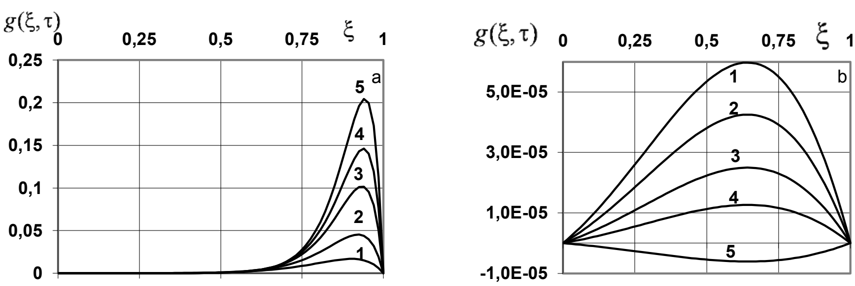

Рис. 1 Розподіли функції $g(\xi,\tau)$ в залежності від різних значень швидкостей конвективного переносу (v=2, 2.5, 3, 3.25, 3.5) при τ=0.001 (рис.a) і різних значень τ=1, 5, 10, 15, 100 (рис.b)

Треба зазначити, що із збільшенням значення параметру τ ($\tau \approx 25$) функція $g(\xi,\tau)$ може змінювати знак на проміжку $[0;\xi_0]$, тобто результуюча потоку через границю контакту може змінювати свій напрям.

1. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Дмитрук В.А. Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах // Доповіді НАН України. – 2011. – № 7. – С. 46-51.