УДК 539.3

# Дослідження ефективності застосування варіантів методу послідовних наближень на прикладі стаціонарної задачі теплопровідності для нескінченного шару

**Вовк О. М.**, к.ф.-м.н., м.н.с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

На сьогоднішній день актуальними є дослідження температурних полів на основі моделей, що враховують термочутливість матеріалу і конвективно-променеву складову теплообміну. Такі моделі є нелінійними крайовими задачами теплопровідності, для розв'язування яких використовуються, в основному, чисельні методи. Зацікавлення науковців викликають аналітико-числові підходи до розв'язування такого класу задач. Один з таких підходів, що базується на використанні варіанту методу послідовних наближень, був запропонований В.С. Поповичем у роботі [1]. У роботі [2] була розв'язана статична задача термопружності для термочутливого порожнистого циліндра з використанням, крім згаданого, ще одного варіанту методу послідовних наближень і проведено порівняння одержаних результатів з точним розв'язком. Для того, щоб отримати повну картину щодо ефективності використання запропонованих варіантів методу послідовних наближень, виникла необхідність їх апробації для тіл іншої геометричної форми. Дана робота присвячена апробації варіантів методу послідовних наближень стосовно розв'язування задачі теплопровідності для нескінченного термочутливого шару з несиметричними крайовими умовами.

Розглянемо задачу про визначення стаціонарного температурного поля $t$ безмежного шару товщиною $l$, термомеханічні характеристики матеріалу якого є функціями температури. Через поверхні $z=0$ і $z=l$ шар обмінюється теплом із зовнішніми середовищами сталих температур $t_{c1}$ і $t_{c2}$ шляхом конвективно-променевого теплообміну.

Зумовлене такими діями стаціонарне температурне поле шару визначаємо з рівняння теплопровідності

$$d\left(\lambda_t(t)\,dt/dz\right)\big/dz=0, \tag{1}$$

за крайових умов

$$\left\lfloor \lambda_t(t)\,dt/dz+(-1)^j\left(\alpha_j(t)\left(t-t_{cj}\right)+\sigma\varepsilon_j(t)\left(t^4-t_{cj}^4\right)\right)\right\rfloor_{z=z_j}=0\ \ (j=1,2),\ z_1=0,\ z_2=l \tag{2}$$

де $\lambda_t(t)$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару; $\alpha_j(t)$, $\varepsilon_j(t)$ – коефіцієнти теплообміну та ступені чорноти поверхонь $z=z_j$ $(j=1,2)$; $\sigma$ – постійна Стефана-Больцмана.

Ввівши безрозмірні величини та застосувавши перетворення Кіркгофа

$$\theta=\int_{T_p}^{T}\lambda_t^*(T)\,dT\,, \tag{3}$$

де $T_p=t_p/t_0$, $t_p$ – нижнє значення діапазону температур, в якому задаються залежності теплових характеристик матеріалу шару, отримаємо таку крайову задачу на змінну $\theta$

$$d^2\theta/d\rho^2=0, \tag{4}$$

$$\left\lfloor d\theta/d\rho+(-1)^{j}\left(Bi_j\alpha_j^*\left(T(\theta)\right)\left(T(\theta)-T_{cj}\right)+Sk_j\varepsilon_j^*\left(T(\theta)\right)\left(T^4(\theta)-T_{cj}^4\right)\right)\right\rfloor_{\rho=\rho_j}=0\ \ (j=1,2). \tag{5}$$

Для знаходження розв'язку крайової задачі (4), (5) було застосовано два варіанти методу послідовних наближень. За $m$-е ($m=1,2,...$) наближення розв'язку задачі брався аналітичний розв'язок такої лінійної задачі:

$$d^2\theta_m\big/d\rho^2=0, \tag{6}$$

$$\left\lfloor d\theta_m/d\rho+(-1)^{j}Bi_{jm-1}\left(\theta_m-\theta_{cj}\right)\right\rfloor_{\rho=\rho_j}=0\quad(j=1,2), \tag{7}$$

де у першому варіанті методу послідовних наближень

$$\theta_{cj}=\int_{T_p}^{T_{cj}}\lambda_t^*(T)\,dT\,,\ Bi_{j0}=Bi_j\,,\ Bi_{jm-1}=\left[\theta_{m-1}\left(\rho_j\right)-\theta_{cj}\right]^{-1}\left\{Bi_j\alpha_j^*\left(T\left(\theta_{m-1}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[T\left(\theta_{m-1}\left(\rho_j\right)\right)-T_{cj}\right]+Sk_j\varepsilon_j^*\left(T\left(\theta_{m-1}\right)\right)\times\left[T^4\left(\theta_{m-1}\left(\rho_j\right)\right)-T_{cj}^4\right]\right\},\quad j=1,2\,,(m\ge 2); \tag{8}$$

у другому варіанті методу послідовних наближень

$$Bi_{jm-1}=\kappa_{m-1}Bi_{jm-1}^*,\ \theta_{cj}=\left(T_{cj}-T_p\right)\big/\kappa_{m-1}\,, \tag{9}$$

$$\kappa_{m-1}=1-0.5\left(\lambda_1\theta_{m-1}-\lambda_1{}^2\theta_{m-1}^2+1.25\lambda_1{}^3\theta_{m-1}^3+...\right),\ Bi_{jm-1}^*=Bi_j^*\Big|_{\theta=\theta_{m-1}},\ Bi_{j0}^*=Bi_j\,,\ j=1,2\,,$$

$(m\ge 2)$

$$Bi_j^*=Bi_j\alpha_j^*\left(T(\theta)\right)+Sk_j\varepsilon_j^*\left(T(\theta)\right)\left(T^2(\theta)+T_{cj}^2\right)\left(T(\theta)+T_{cj}\right).$$

Розв'язок рівняння (6) має вигляд $\theta_m=C_1\rho+C_2$, де $C_1,C_2$ – сталі, які знаходимо з умов (7):

$$C_1=\left[Bi_{1m-1}Bi_{2m-1}\theta_{c2}+Bi_{1m-1}^2\theta_{c1}\left(1+Bi_{2m-1}\right)\right]\big/\Delta-Bi_{1m-1}\theta_{c1}\,,$$

$$C_2=\left[Bi_{2m-1}\theta_{c2}+\left(1+Bi_{2m-1}\right)Bi_{1m-1}\theta_{c1}\right]\big/\Delta,\ \Delta=Bi_{1m-1}+Bi_{1m-1}Bi_{2m-1}+Bi_{2m-1}\,.$$

Тут $Bi_{jm-1}$ та $\theta_{cj}$ визначаються формулами (8) або (9) відповідно.

За лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури для $m$-ого наближення температурного поля маємо $T_m(\theta)=\lambda_1^{-1}\left(\sqrt{1+2\lambda_1\theta_m}-1\right)+T_p$, де $\lambda_1$ – задана стала.

Для встановлення, який із розглянутих вище варіантів методу послідовних наближень ефективніший, знайдено точний розв'язок задачі (6), (7) і проведено порівняння його з отриманими. Числові дослідження проведено для випадку, коли через поверхню шару $\rho=0$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем температура якого $373\,K$, а через поверхню $\rho=1$ відбувається складний теплообмін з середовищем сталої температури рівної $873\,K$ за різних значень критеріїв Біо та Старка. Точніші значення температурного поля було отримано завдяки першому варіанту методу послідовних наближень.

1. Попович В.С. Побудова розв'язків задач термопружності термочутливих тіл при конвективно-променевому теплообміні // Доп. НАН України. – 1997. – № 11. – С. 69–73.
2. Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 151–158.