

УДК 539.3

## Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутної пластини в загальному випадку навантаження

Ревенко В. П., к.ф.-м.н., с.н.с., с.н.с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
(вул. Наукова, 3<sup>б</sup>, м. Львів, 79060, Україна)

Прямокутні пластини широко використовуються в машинобудуванні і будівництві, тому дослідження їх плоского напружено-деформованого стану (НДС) – важлива наукова і практична проблема, яка зводиться до розв’язання відповідної крайової задачі теорії пружності з подальшим використанням однорідних розв’язків (власних функцій) [1, 2]. Розглянемо плоску статичну задачу для пластини сталої товщини  $h$ , середина поверхня якої займає деяку область  $\Pi = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$  в координатній площині  $xOy$  за відсутності масових сил (рис. 1). На контурі  $L$  прямокутника  $\Pi$  задані граничні умови в напруженнях. Товщина пластини  $h$  є досить малою в порівнянні з характерними розмірами області  $\Pi$ . Бокові поверхні пластини ( $z = \pm h/2$ ) вільні від навантажень. На торцях пластини прикладені рівномірно розподілені вздовж осі  $z$  навантаження.

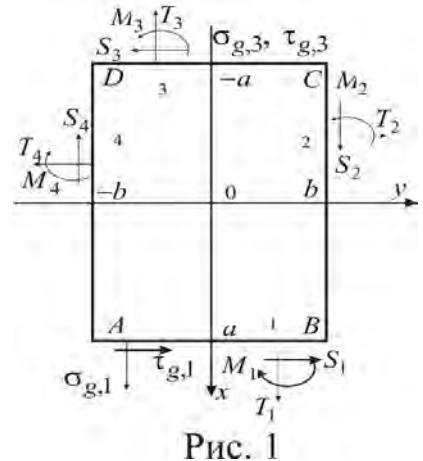


Рис. 1

$$\sigma_n(x, y)|_L = \sigma_g|_L, \quad \tau_n(x, y)|_L = \tau_g|_L, \quad (1)$$

де нормальні та дотичні навантаження  $\sigma_g, \tau_g \in$  кусково-неперервними функціями вздовж контуру  $L$ .

Для визначення НДС пластини необхідно попередньо знайти основний напружений стан, (який інтегрально відповідає заданим головним векторам зусиль і моментів на кожній стороні пластини), а для визначення самозрівноваженого (відносно кожної сторони пластини) напруженого стану поставити відповідну крайову задачу для визначення власних функцій. Знайдено функцію напружень, яка описує основний напружений стан навантаженої прямокутної пластини

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = & \frac{T_4}{4ha} x^2 - \frac{M}{4hab} xy + \frac{T_3}{4hb} y^2 + \frac{M_4}{4ha^3} x^3 + \frac{M_3}{4hb^3} y^3 + \\ & + \frac{M_1 - M_3}{8hab^3} [y^3(x + a) - 3b^2xy] + \frac{T_1 - T_3}{16ha^3b} \left[ y^2(2a^3 + 3a^2x - x^3) + \frac{1}{5}x^5 + a_1x^3 \right] + \\ & + \frac{M_2 - M_4}{8ha^3b} [x^3(y + b) - 3a^2xy] + \frac{T_2 - T_4}{16hab^3} \left[ x^2(2b^3 + 3b^2y - y^3) + \frac{1}{5}y^5 + a_2y^3 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

де  $M = a(S_1 + S_3) - M_1 + M_3$ . Перевірено, що функція напружень (2) задовольняє бігармонічне рівняння. Використано функцію (2) і знайдено напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_y^0 = & \frac{T_4}{2ha} + \frac{3M_4}{2ha^3} x + \frac{M_2 - M_4}{4ha^3b} 3x(y + b) + \\ & + \frac{T_1 - T_3}{8ha^3b} [2x^3 - 3xy^2 + 3a_1x] + \frac{T_2 - T_4}{8hb^3a} (2b^3 + 3b^2y - y^3), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^0 &= \frac{T_3}{2hb} + \frac{3M_3}{2hb^3} y + \frac{T_1 - T_3}{8ha^3b} (2a^3 + 3a^2x - x^3) + \\ &\quad + \frac{M_1 - M_3}{4hb^3a} 3y(x+a) + \frac{T_2 - T_4}{8ha^3b} (2y^3 + 3yx^2 + 3a_2y), \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{M}{4hab} + \frac{M_1 - M_3}{8hb^3a} 3(b^2 - y^2) + \frac{M_2 - M_4}{8ha^3b} 3(a^2 - x^2) - \\ &\quad - \frac{T_1 - T_3}{8ha^3b} 3y(a^2 - x^2) - \frac{T_2 - T_4}{8hb^3a} 3x(b^2 - y^2)\end{aligned}$$

Використано відомий алгоритм [2] та співвідношення (3) і знайдено переміщення

$$u = \frac{1}{E} \left[ \int_0^x \sigma_x^0 dx - \nu \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} + f_2(y) \right], \quad v = \frac{1}{E} \left[ \int_0^x \sigma_y^0 dy - \nu \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} + f_1(x) \right],$$

де

$$f_1(x) = c_2 + (2M' - c_1 + 3a^2M_2^4)x - \frac{1}{2}[M_3' + 3aM_1^3 + (3a_2 + 6b^2)T_2^4]x^2 - \left(\frac{1}{2}M_1^3 + M_2^4\right)x^3 + \frac{1}{4}T_2^4x^4,$$

$$f_2(x) = c_3 + (c_1 + 3b^2M_1^3)y - \frac{1}{2}[M_4' + 3bM_2^4 + (3a_1 + 6a^2)T_1^3]y^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{2}M_2^4 + M_1^3\right)y^3 + \frac{1}{4}T_1^3y^4, \quad M' = \frac{M}{4hab}, \quad M_3' = \frac{3M_3}{2hb^3}, \quad M_4' = \frac{3M_4}{2ha^3}, \quad T_4' = \frac{T_4}{2ha}, \quad T_3' = \frac{T_3}{2hb},$$

$$M_2^4 = \frac{M_2 - M_4}{4ha^3b}, \quad M_1^3 = \frac{M_1 - M_3}{4hab^3}, \quad T_1^3 = \frac{T_1 - T_3}{8ha^3b}, \quad T_2^4 = \frac{T_2 - T_4}{8hb^3a}, \quad c_j - \text{невідомі сталі.}$$

Після виділення напружень (3) з крайових умов (1), шукана функція напружень подана у вигляді ряду за власними функціями. Згідно з працею [2], невідомі коефіцієнти біля власних функцій визначаються із мінімуму узагальненого квадратичного функціоналу. Показано, що точність задоволення декількох крайових умов визначається числовим значенням мінімуму узагальненої квадратичної форми, і, якщо це значення збігається до нуля, то знайдений наближений розв'язок збігається до точного розв'язку. Проведено дослідження оцінки похибки задоволення двох крайових умов скінченним набором власних функцій. Досліджено вплив розривів першого роду в навантаженнях або їх похідних на точність визначення напружень. На конкретних прикладах підтверджено високу точність наближеного розв'язку і високу швидкість обчислень.

Досліджено НДС і міцність прямокутної пластини, одночасно навантаженої локально розподіленими нормальними і дотичними зусиллями на одній, двох, трьох та чотирьох сторонах. Встановлені нові якісні і кількісні закономірності розподілу компонентів НДС прямокутної пластини під дією локально розподілених зусиль, які моделюють прикладені сили.

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. Ревенко В. П. О численно-аналитическом методе расчета напряженного состояния упругой прямоугольной пластины // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 1. – С.90–98.