**УДК 004.942**

**В. Різник, О. Різник, Б. Балич, Д. Скрибайло-Леськів**
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра автоматизованих систем управління

# СИНТЕЗ ПЛАНІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ ЗА ДОПОМОГОЮ ІДЕАЛЬНИХ КІЛЬЦЕВИХ ВІДНОШЕНЬ



**Розглянуто синтез планів експерименту на основі числових в'язанок та можливість використання планів експерименту з багатьма факторами. Розроблено методику побудови латинських квадратів на основі теорії числових в'язанок, що дає можливість виключити небажані ефекти у статичних дослідженнях.**

**In the article the synthesis of plans of experiment is examined on the basis of numerical bundles. The presented possibility of the use of plans of experiment is with many factors. The developed method of construction of the Latin squares is on the basis of theory of numerical bundles, which enables to eliminate небажані effects in static researches.**

## Вступ

Під час будь-якого реального експерименту типовою є наявність різного роду неоднорідностей, вплив яких бажано вилучити при порівнянні рівнів основних чинників [3]. На перших етапах дослідження дуже часто в експеримент доводиться вводити велику кількість чинників, щоб не пропустити жодного з потенційно істотних, оскільки подальші експерименти можуть втратити будь-який сенс, якщо деякий сильно впливаючий чинник не буде введено до програми дослідження. Тут виникає необхідність проведення експерименту, мета якого полягає у виділенні групи істотних чинників і відсіюванні неістотних. На наступному етапі дослідження вплив істотних чинників може вивчатися детальніше. Для побудови багаторівневих планів при проведенні експериментів широко використовуються комбінаторні конфігурації (латинські квадрати, куби і гіперкуби), що дає змогу значно зменшити кількість варіантів [3].

## Постановка проблеми

При обробці інформації з використанням багатофакторних планів експерименту важливе значення мають латинські квадрати і системи латинських квадратів (попарно ортогональних латинських квадратів).

Латинським квадратом називають матрицю, в якій символи розміщені так, що в кожному рядку і в кожному стовпчику кожен символ зустрічається тільки один раз. Латинський квадрат $p$-го порядку утворює матрицю $p\times p$. Два латинські квадрати порядку $p$ називають взаємно ортогональними, якщо при накладанні їх один на одного кожен із $p$ символів одного квадрата зустрічається точно один раз із кожним символом другого. У системі, утвореній попарно ортогональними квадратами, два будь-які латинські квадрати взаємно ортогональні. Комбінація номеру рядка, стовпчика і символу утворює комбінацію рівнів першого, другого та третього факторів. Отже, в латинському квадраті $p\times p$ є три фактори з $p$ рівнями. Але розглядаються тільки $p^2$ різних комбінацій рівнів факторів замість $p^3$ можливих комбінацій, що дає змогу скоротити обсяг експериментальних досліджень.

При дослідженні чотирьох факторів використовують два взаємно ортогональні латинські квадрати. Якщо збільшується кількість факторів, то необхідно створювати плани на попарно ортогональних латинських квадратах. Максимальна кількість таких квадратів $p$-го порядку дорівнює $p-1$.

Використовуючи систему взаємно ортогональних латинських квадратів, можна будувати плани експерименту на латинських квадратах, які виключають різного роду статистичні неоднорідності.

## Розв'язання поставленої задачі

Можливим розв'язанням поставленої задачі є застосування комбінаторних конфігурацій з нееквідистантною структурою. Запропоновано алгоритм побудови сімей попарно ортогональних латинських квадратів з використанням властивостей ідеальних кільцевих відношень (ІКВ). ІКВ – це така послідовність $n$ цілих чисел $k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, k_n$, за якою можна отримати всі значення від 1 до суми всіх чисел серед поруч розташованих чисел точно задану кількість разів [1, 2].

Покажемо алгоритм генерації множини попарно ортогональних латинських квадратів порядку $p = n - 1$ на базі простої ІКВ $n$-го порядку:

1. За допомогою чисел $k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, k_n$ ІКВ $n$-го порядку будуємо сім'ю прямих $P$ для нумерації рядків латинських квадратів:

$$p_{ij} \equiv \left\{ \begin{matrix} 1 + \sum\limits_{l=i+j}^{i+j} k_l, & \text{якщо}\, i + j \le n \\ 1 + \sum\limits_{l=i+1}^{n} k_l + \sum\limits_{l=1}^{i+j-n} k_l, & \text{якщо}\, i + j > n \end{matrix} \right\} (\operatorname{mod} S_n), \tag{1}$$

де $i, j$ – номер рядка і стовпчика множини $P$ відповідно; $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$; $S_n = n^2 - n + 1$.

2. Будуємо сім'ю прямих $C$ для нумерації стовпчиків латинських квадратів:

$$c_{ij} \equiv \left\{ \begin{matrix} 1 + k_1 + \sum\limits_{l=i}^{i+j-1} k_l, & \text{якщо}\, i + j \le n+1 \\ 1 + k_1 + \sum\limits_{l=i}^{n} k_l + \sum\limits_{l=1}^{i+j-n-1} k_l, & \text{якщо}\, i + j > n+1 \end{matrix} \right\} (\operatorname{mod} S_n), \tag{2}$$

Побудову продовжуємо доти, поки задовольняється вимога

$$c_{ij} \not\equiv 1 + \sum_{l=1}^{r} k_l (\operatorname{mod} S_n), r \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Якщо умови формули (2) не виконуються, то будуємо сім'ю прямих $C$, використовуючи формули

$$c_{ij} \equiv \left\{ \begin{matrix} 1 + k_1 + \sum\limits_{l=i+1}^{i+j} k_l, & \text{якщо}\, i + j \le n \\ 1 + k_1 + \sum\limits_{l=i+1}^{n} k_l + \sum\limits_{l=1}^{i+j-n} k_l, & \text{якщо}\, i + j > n \end{matrix} \right\} (\operatorname{mod} S_n) \tag{4}$$

3. Аналогічно побудові сімей прямих $C$ будуємо всі інші сім'ї прямих, причому формули для розрахунку $z$-го ($z = 1, 2, \ldots, n-1$) сімей $M(z)$ прямих мають такий вигляд:

$$m_{ij}(z) \equiv \left\{ \begin{matrix} 1 + k_1 + \sum\limits_{l=2}^{z+1} k_l + \sum\limits_{l=i+b}^{i+j-a} k_l, & \textbf{якщо}\, i + j \le n + a \\ 1 + k_1 + \sum\limits_{l=2}^{z+1} k_l + \sum\limits_{l=i+b}^{n} k_l + \sum\limits_{l=1}^{i+j-n-a} k_l, & \textbf{якщо}\, i + j > n + a \end{matrix} \right\} (\textbf{mod}\, S_n), \tag{5}$$

$$\textbf{де}\; a = 1, b = 0 \;\textbf{при}\; m_{ij} \not\equiv 1 + \sum_{l=1}^{r} k_l (\operatorname{mod} S_n);$$

$$a = 0, b = 1 \;\textbf{при}\; m_{ij} \equiv 1 + \sum_{l=1}^{r} k_l (\operatorname{mod} S_n);\; z = 1, 2, \ldots, n-2;\; \mathbf{r} \in \{\mathbf{1, 2, \ldots, n}\}.$$

4. Використовуючи координати комірок $P$ і $C$, будуємо $n - 2$ квадратів $Q_z$.

Одержані квадрати утворюють сім'ю попарно ортогональних латинських квадратів $p \times p$.

Для прикладу реалізації викладеного алгоритму побудуємо сім'ю квадратів на основі ІКВ (1, 3, 10, 2, 5), де $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 10$, $k_4 = 2$, $k_5 = 5$; $n = 5$.

1. За формулою (5) будуємо сім'ю $P$ прямих для нумерації рядків латинських квадратів:

$$\begin{vmatrix} 4 & 14 & 16 & 21 \\ 11 & 13 & 18 & 19 \\ 3 & 8 & 9 & 12 \\ 6 & 7 & 10 & 18 \end{vmatrix}$$

2. Сім'ю $C$ прямих для нумерації стовпчиків латинських квадратів знаходимо за допомогою (1–4):

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 16 & 21 \\ 12 & 14 & 19 & 20 \\ 4 & 9 & 10 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 21 \end{vmatrix}$$

3. Використовуючи (5), будуємо сім'ю $M(z)$ інших трьох ($n - 2 = 3$) прямих:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 19 & 21 \\ 8 & 18 & 20 & 4 \\ 7 & 12 & 13 & 16 \\ 10 & 11 & 14 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 16 & 19 & 8 & 10 \\ 18 & 7 & 9 & 14 \\ 4 & 6 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 3 & 13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 18 & 21 & 10 & 12 \\ 20 & 9 & 11 & 16 \\ 6 & 8 & 13 & 14 \\ 19 & 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. За координатами комірок P і C будуємо квадрати $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$. Для одержання першого рядка у кожному з цих квадратів у нормалізованому вигляді (1, 2, 3, 4) здійснюємо відповідну перенумерацію прямих $M(z)$.

У результаті отримуємо сім'ю попарно ортогональних латинських квадратів з трьох латинських квадратів:

$$\begin{array}{cccc} & Q_1 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & Q_2 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & Q_3 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Отриманий план можна застосовувати у п'ятифакторному експерименті, де рівням першого фактора відповідають номери стовпчиків, другого фактора– номери рядків, а рівням решти факторів – символи першого, другого та третього квадратів.

## Висновки

На основі алгоритму створена комп'ютерна програма, яка дає можливість генерації багатофакторних оптимальних планів експериментів з вилученням неоднорідностей у статичних дослідженнях і можливість комп'ютерного синтезу планів експериментів із заданими властивостями.

*1. Різник О.Я. Завадостійкий спосіб перетворення сигналів // Матеріали Четвертої укр. конф. з автоматичного керування ("Автоматика-97"). – Черкаси, 1997. – С. 34. 2. Ризнык О.Я. Комбинаторные модели для синтеза технических устройств и систем на основе числовых линейных сцепок // Контрольно-измерительная техника. – Львов: Вища школа. – 1989. – Вып. 45. – С. 23–25. 3. Різник В.В. Синтез оптимальних комбінаторних систем. – Львів, 1989.*