УДК 519.62 – 681.511.42

Застосування z-перетворення для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

Мороз В. І., д.т.н., проф. каф. ЕАП

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Існуючі числові методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь мають суттєве обмеження – розв’язок повинен бути неперервним і диференційованим, оскільки описується обмеженим розкладом у ряд Тейлора, узгодженим з порядком даного числового методу. Вирішити проблему розв’язування диференціальних рівнянь для функцій розв’язку з розривами можна використанням інтегральних методів [1], зокрема, z-перетворення [2, 3].

Теоретичне обґрунтування. Розглянемо опис динамічних процесів у формі системи диференціальних рівнянь першого порядку для початкових умов $y_1 \neq 0, \ldots, y_n \neq 0$:

$$\begin{cases} T_1 \dfrac{dy_1}{dt} + y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n); \\ \vdots \\ T_n \dfrac{dy_n}{dt} + y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1}$$

де $T_1, \ldots, T_n$ – власні сталі часу системи; $y_1, \ldots, y_n$ – проміжні координати стану системи; $x_1, \ldots, x_m$ – зовнішні збурення системи; $f_1, \ldots, f_n$ – відповідні функції.

Диференціальне рівняння першого порядку $T \cdot y' + y = f$ можна, як відомо, розв’язати з використанням перетворення Лапласа $Y(s) = \frac{F(s)}{T \cdot s + 1}$, де $Y(s)$, $F(s)$ – відображення за Лапласом, відповідно, координати y і збурення f. Перейти до рекурентних формул, які дають змогу отримати табличний розв’язок з кроком h, можна з використанням апарату z-перетворення [2, 3], в якому для заміни довільної функції f застосовують її перетворення поліномами нульового і першого порядків – для цього використовують фіксатори відповідного типу.

Фіксатор нульового порядку після застосування призводить до передатної функції:

$$Z\left(\left(\frac{1 - e^{-s \cdot h}}{s}\right) \cdot \left(\frac{1}{T \cdot s + 1}\right)\right) \Rightarrow \frac{1 - e^{-\frac{h}{T}}}{z - e^{-\frac{h}{T}}},$$

звідси за отриманою дискретною передатною функцією матимемо рекурентне рівняння:

$$y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{h}{T}} + \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) \cdot f_i.$$

Фіксатор першого порядку після застосування призводить до передатної функції:

$$Z\left(\left(\frac{(1 - e^{-s \cdot h})^2 e^{s \cdot h}}{h \cdot s^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{T \cdot s + 1}\right)\right) \Rightarrow \frac{z - e^{-\frac{h}{T}} - \dfrac{T}{h} \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) \cdot (z - 1)}{z - e^{-\frac{h}{T}}},$$

звідси за отриманою дискретною передатною функцією матимемо рекурентне рівняння:

$$y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{h}{T}} + \left(f_{i+1} - f_i \cdot e^{-\frac{h}{T}}\right) - \frac{T}{h} \cdot (f_{i+1} - f_i) \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right), \tag{2}$$

де f_i, f_{i+1} – значення відповідної функції в моменти часу t_i і t_{i+1}.

Використання формули (2) дає змогу отримати розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді системи рекурентних рівнянь:

$$\begin{cases} y_{1_{i+1}} = y_{1_i} \cdot e^{-\frac{h}{T_1}} + f_{1_{i+1}} - f_{1_i} \cdot e^{-\frac{h}{T_1}} - \dfrac{T}{h} \cdot \left(f_{1_{i+1}} - f_{1_i}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T_1}}\right); \\ \vdots \\ y_{n_{i+1}} = y_{n_i} \cdot e^{-\frac{h}{T_n}} + f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \cdot e^{-\frac{h}{T_n}} - \dfrac{T}{h} \cdot \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T_n}}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Метод підстановки нулів та полюсів

Іншим способом отримання рекурентних формул є використання неперервних передатних функцій динамічної системи та перехід на їх основі до дискретних передатних функцій (аналітичне z-перетворення). Для цього використовується метод підстановки нулів та полюсів, короткий алгоритм якого подано нижче.

1. Знайти всі нулі Z_i $(i = 1, \dots, m)$ і полюси P_j $(j = 1, \dots, n)$ неперервної передатної функції моделі досліджуваної системи, для якої порядок чисельника складає m, а порядок знаменника – n, причому $n \geq m$ з умови фізичної реалізованості.
2. З використанням відомого співвідношення $z = e^{s \cdot h}$, де h – крок часової дискретизації, перейти до дискретної передатної функції, записаної в термінах нулів і полюсів:
   - дискретні нулі визначатимуться за виразом $Z_i^* = e^{Z_i h}$, де $i = 1, \dots, m$;
   - дискретні полюси визначатимуться за виразом $P_j^* = e^{P_j h}$, де $j = 1, \dots, n$.

Узагальнити цей підхід можна таким чином:

$$K \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m}(s - Z_i)}{\sum_{j=1}^{n}\left(s - P_j\right)} \Rightarrow K^* \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m}(z - e^{Z_i \cdot h})}{\sum_{j=1}^{n}\left(z - e^{P_j \cdot h}\right)}. \quad (4)$$

Співвідношення (4) дає змогу знайти дискретну передатну функцію, що відповідає системі звичайних диференціальних рівнянь (1) і отримати її розв'язок.

Одержані таким чином рекурентні рівняння є стійкими для будь-якого кроку розв'язування і мають властивість сильної стійкості (показано в [4]). Вибір кроку інтегрування системи (1) за допомогою отриманої системи рекурентних рівнянь визначається вже не з умов стійкості числового методу, а лише необхідним рівнем деталізації досліджуваного процесу.

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
2. Jury E. I. Theory and Application of the Z-Transform Method / E. I. Jury. – New York: John Wiley & Sons, Inc. – 1964. – 327 p. (наукове видання).
3. Смит Дж. М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / Дж. М. Смит; [под. ред. О. А. Чембровского] – М.: Машиностроение, 1980. – 271 с.
4. Мороз В. Ефективні рекурентні формули для комп'ютерного моделювання електромеханічних систем / В. Мороз // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" "Електроенергетичні та електромеханічні системи". – 2007. – № 597. – С. 3-11.