УДК 519.62

Наближені методи розв’язування задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра

Пелех Я. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок) у загальному випадку зводяться до розв’язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

Розглянемо на відрізку I_L: $[x_0,\ x_0 + L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)ds]\right], \quad u(x_0) = u_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L]. \tag{1}$$

Припустимо, що розв’язок задачі (1) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю.

На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів та теорію побудови методів Рунге-Кутта наближений розв’язок задачі (1) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу:

$$u_1 = \cfrac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}} \tag{2}$$

При $k + l = 2$ $(k = 1, 2;\ l = 0, 1)$

$$c_0 = u_0,\ d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0},\ d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0},\ d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2}, \tag{3}$$

$$\delta_1 = h(a_{11}k_1 + a_{12}k_1),\ \delta_2 = h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2),\ k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0],$$

$$k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21} h k_1, \gamma_{21} K_1],\ K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma h k_1],$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ – параметри.

Пропонуються обчислювальні схеми, які дають можливість на кожному кроці інтегрування отримувати наближення до точного розв’язку задачі (1) порядку $O(h^2)$ і $O(h^3)$. Для знаходження наближеного розв’язку рівняння (1) в наступних вузлових точках використується метод рухомого початку і формули (2)-(3).

Важливою особливістю запропонованих алгоритмів є те, що при конкретних значеннях параметрів, які входять у відповідні обчислювальні схеми, можна отримувати як нові, так і традиційні методи Рунге-Кутта для розв’язування інтегро-диференціальних рівнянь вигляду (1).