УДК 519.221

Про взаємозв'язок між слушністю і асимптотичною незміщеністю статистичних оцінок

Ружевич Н. А., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Нехай $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — вибірка з $\mathcal{L}(\xi) \in \mathcal{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$.

Означення. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ називається слушною оцінкою скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$ скалярного або векторного параметра θ, якщо вона збігається до цієї функції за ймовірністю при $n \to \infty$. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \theta \in \Theta\colon \lim_{n\to\infty} P(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| < \varepsilon) = 1.$$

Означення. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ називається асимптотично незміщеною оцінкою скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} MT_n(\boldsymbol{\zeta}) = \tau(\theta), \forall \theta \in \Theta.$$

Поняття асимптотичної незміщеності і слушності оцінок тісно зв'язані. Але асимптотично незміщена оцінка необов'язково є слушною і навпаки – не кожна слушна оцінка є асимптотично незміщеною. Про це свідчать такі два приклади.

Приклад 1. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{1}{n}$ є асимптотично незміщеною оцінкою для параметра θ, але не є слушною оцінкою для цього параметра, якщо $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ є вибірка з $\mathcal{L}(\xi) \in R(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$.

Приклад 2. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \left(\xi_{(1)}\right)^n + \bar{\zeta}$ є слушною оцінкою для параметричної функції $\tau(\theta) = 2\theta, \forall \theta \in (1/2\,, 1)$, але не є асимптотично незміщеною для цієї функції, якщо $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – вибірка з розподілу випадкової величини ξ, що набуває два значення 2 і 0 з відповідними ймовірностями θ і $1 - \theta$, $(\theta \in (1/2\,, 1))$.

В літературі широко відома достатня умова слушності асимптотично незміщеної оцінки, яка полягає в тому, що дисперсія цієї оцінки прямує до нуля при збільшенні об'єму вибірки. Наведемо тепер одну достатню ознаку асимптотичної незміщеності слушної оцінки.

Теорема. Нехай $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ слушна оцінка скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$ і

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \theta \in \Theta\colon \lim_{n\to\infty} (C_n)^2 \cdot P(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geq \varepsilon) = 0,$$

де $|T_n(\boldsymbol{\zeta})| \leq C_n < \infty$, а $\{C_n\}$ – деяка послідовність невід'ємних дійсних чисел. Тоді $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ – асимптотично незміщена оцінка $\tau\left(\theta\right)$ з дисперсією, що задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} DT_n(\boldsymbol{\zeta}) = 0, \forall \theta \in \Theta.$$

1. Воинов В. Г., Никулин М. С. Несмещенные оценки и их применения. – М.: Наука, 1989. – 440 с.
2. Ружевич Н. А. Математична статистика. – Львів: Львівська політехніка, 2001. – 168 с.