УДК 514.7

Специальные диффеоморфизмы многообразий с почти кватернионной структурой

Курбатова И. Н., к.ф.-м.н., доц. каф. геометрии и топологи

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
(ул. Дворянская, 2[г]. Одесса, 65001, Украина)

Рассмотрим пространство аффинной связности без кручения A_n с объектом аффинной связности Γ, на котором определена пара аффинорных структур $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, удовлетворяющих условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h + \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0. \tag{1}$$

$$\overset{*}{Q}{}_{ij}^{\gamma\delta} \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{F}{}_\alpha^h \overset{s}{F}{}_{\gamma,\delta}^\alpha = 0, \tag{2}$$

где

$$\overset{*}{Q}{}_{ij}^{\gamma\delta} = \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{F}{}_i^\gamma \overset{s}{F}{}_j^\delta, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h,$$

« , » - знак ковариантной производной по связности Γ. Мы называем такое пространство $\overset{*}{Q}$ **- пространством**.

Соотношения (1), как известно, определяют почти кватернионную структуру, а (2) являются обобщением понятия O^* - пространств в теории почти комплексных многообразий [1].

Тензор $\overset{*}{Q}{}_{ij}^{\gamma\delta} = \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{F}{}_i^\gamma \overset{s}{F}{}_j^\delta$, может быть представлен в виде

$$\overset{*}{Q}{}_{ij}^{hk} = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^h \delta_\beta^k + \overset{1}{F}{}_\alpha^h \overset{1}{F}{}_\beta^k\right)\left(\delta_\gamma^\alpha \delta_\sigma^\beta + \overset{2}{F}{}_\gamma^\alpha \overset{2}{F}{}_\sigma^\beta\right)\left(\delta_i^\gamma \delta_j^\sigma + \overset{3}{F}{}_i^\gamma \overset{3}{F}{}_j^\sigma\right)$$

и поэтому классу $\overset{*}{Q}$ - пространств принадлежат почти кватернионные многообразия, являющиеся O^* -, K -, H - и келеровыми пространствами [1] относительно структур $\overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}$.

Рассмотрим пространства аффинной связности без кручения $A_n, \overline{A_n}$ с объектами связности $\Gamma, \overline{\Gamma}$ и почти кватернионными структурами $\left(\overset{1}{F}, \overset{2}{F}\right), \left(\overline{\overset{1}{F}}, \overline{\overset{2}{F}}\right)$ соответственно. Назовем **4-квазипланарным отображением (4КПО)** $f: A_n \to \overline{A_n}$, сохраняющим почти кватернионную структуру, взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \ldots x^n$ имеет место зависимость [2]

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{h}(x) = \Gamma_{ij}^{h}(x) + \sum_{s=0}^{3} \underset{s}{q}_{(i}(x)\overset{s}{F}{}_{j)}^{h}(x), \tag{3}$$

где $\overset{0}{F}{}_i^h = \delta_j^h$, $\overline{\overset{s}{F}}(x) = \overset{s}{F}(x)$, $\underset{s}{q}_i$ - некоторые ковекторы. Нетрудно видеть, что при отображениях (3) сохраняются кривые вида $x^h = x^h(t)$, $h = 1,2,...,n,$ вдоль которых выполняются дифференциальные уравнения

$$\lambda^h{}_{,\alpha}\lambda^\alpha = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^{3} \underset{s}{a}(t)\overset{s}{F}{}_\alpha^h, \qquad \lambda^h = \frac{dx^h}{dt},$$

$\underset{s}{a}$ - некоторые функции параметра t.

Предположим, что пространства A_n и $\overline{A_n}$ находятся в 4КПО, сохраняющем почти кватернионную структуру, и являются $\overset{*}{Q}$ - пространствами. Тогда справедлива

Теорема 1. Геометрические объекты

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n^2-4}\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha\left((n-4)\delta_{(i}^\beta\delta_{j)}^h - n\sum_{s=1}^{3}\overset{s}{F}{}_{(i}^\beta\overset{s}{F}{}_{j)}^h\right)$$

и

$$T_{ijk}^h = \tilde{R}_{ijk}^h - \frac{1}{n+2}\overset{*}{Q}{}_{[jk]}^{\alpha h}\tilde{R}_{i\alpha},$$

где $$\tilde{R}_{ijk}^h = \left(\delta_i^\beta\delta_\alpha^h - \sum_{s=1}^{3}\overset{s}{F}{}_i^\beta\overset{s}{F}{}_\alpha^h\right)\overset{*}{Q}{}_{jk}^{\gamma\delta}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha, \qquad \tilde{R}_{ij} = \tilde{R}_{ij\alpha}^\alpha, \tag{4}$$

инвариантны относительно 4КПО $\overset{*}{Q}$ - пространств, сохраняющих почти кватернионную структуру.

Назовем пространства, допускающие 4КПО на плоское, **4-квазиплоскими**. Для риманова 4-квазиплоского $\overset{*}{Q}$ - пространства K_n с метрическим тензором g_{ij} имеет место

Теорема 2. Тензор Римана 4-квазиплоского $\overset{*}{Q}$ - пространства по необходимости удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{R}_{ijk}^h = \frac{\tilde{R}}{n(n+2)}\overset{*}{Q}{}_{[jk]}^{\alpha h}g_{\alpha i}, \qquad \tilde{R} = \tilde{R}_{\beta\gamma\alpha}^\alpha g^{\beta\gamma},$$

где $\tilde{R}_{ijk}^h$ даются формулами (4).

1. Беклемишев Д. В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой // Геометрия. 1963. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР – М.,1965.-С.165-212.
2. Курбатова И. Н., Хаддад М. О некотором типе диффеоморфизмов многообразий со специальной почти кватернионной структурой // Тезисы докладов международной конференции “Геометрия в Одессе-2007”, Одесса, (2007), с.72.